UNDERSÖKNINGAR

RÖRANDE

PROBLEMRÄKNINGENS FÖRUTSÄTTNINGAR OCH FÖRLOPP

AKADEMISK AVHANDLING

AV

K. G. JONSSON

UPPSALA 1919
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

Diss.
Uppsala
1919.

UNDERSÖKNINGAR

RÖRANDE

PROBLEMRÄKNINGENS FÖRUTSÄTTNINGAR OCH FÖRLOPP

AKADEMISK AVHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AV

VITTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPPSALA
HUMANISTISKA SEKTION

FÖR VINNANDE AV FILOSOFISK DOKTORSGRAD

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AV

K. G. JONSSON

Å LÄROSALEN N:R I
MÅNDAGEN DEN 19 MAJ 1919 KL. 10 F. M.

UPPSALA 1919
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.
19156

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

Sid.

Inledning 1
Tidigare undersökningar på räknepsykologiens område . . . 4
Undersökningarnas anordning 20
Problembehandling och uppgifternas formulering 30
Problembehandling och uppgifternas natur 49
Problembehandling och användandet av ekvationer 61
Problembehandling och den räknandes ståndpunkt, inlärningssätt m. m. 70
Individuella olikheter:
A. Olika grad av åskådliggörande 84
B. Olika analyseringssätt 95
C. Olikheter i fråga om omedvetna moment 106
Typer och huvudmoment vid problemlösandet 114
Sammanfattning 151
Pedagogiska konsekvenser 153

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523715_0004

Inledning.

Man kan utan att göra sig skyldig till överdrift säga, att räknepsykologien är mycket sparsamt företrädd inom den pedagogiska litteraturen. Särskilt är detta fallet i fråga om det område, som här avhandlade undersökningar omfatta. Beträffande problemlösningens förutsättningar och förlopp finns veterligen ingenting nämnvärt. Emellertid har en kort historik angående förut företagna undersökningar inrymts i denna framställning. Men då dessa undersökningar ha ytterligt litet gemensamt med de här behandlade, har anledning saknats att närmare gå in på dem.

Vid matematikundervisningen finner man ofta, att lärjungarna förfara högst olika, isynnerhet då det är fråga om att lösa problem. Inte bara så, att den ena löser dem rätt och den andra orätt. Det stannar inte heller vid att den ena lärjungen löser problemet snabbare och mera elegant än den andra. Sinsemellan lika duktiga räknare kunna gå till väga på mycket olika sätt. Ja, t. o. m. en och samma räknare kan vid skilda tillfällen eller under vissa olika omständigheter behandla ett och samma eller likartade problem på divergerande sätt.

Man har kanske också kunnat spåra en och annan orsak härtill och t. o. m. funnit, att orsakerna kunna vara dels av mera yttre, dels av mera inre art, d. v. s. vara tillfinnandes hos de räknande själva.

Ofta synas olikheter beträffande formuleringen (den språkliga formen, »texten») av problemen ha inverkat på behandlingen. Lärjungarna ha ibland ej rätt fattat, vad som åsyftats; vid enstaka tillfällen har kanske läraren själv stått tveksam härvidlag. I varje fall har man vid undervisningen märkt, att som-

liga uppgifter varit iklädda en språklig form, som varit onödigt krånglig, samt att lärjungarna haft olika svårt eller olika lätt att översätta till det rent matematiska språket.

Problemets egen art inbjuder ofta till ett visst förfaringssätt vid lösandet. Ett formelproblem exempelvis får oftast en annorlunda beskaffad behandling än ett s. k. allmänt problem. Vidare kan den använda räknearten inverka. Om ett problem löses medelst ekvationer, får det ofta ej samma behandling, som om det löstes utan användande av sådana.

Att inläringssättet spelar en viss roll på hithörande område, torde vara visst. Lärarens och lärobokens sätt att ta saken bör givetsvis influera på lärjungen. Vidare kunna räkneförmåga, indisposition i en eller annan form o. s. v. göra sitt till, att olikheter uppkomma.

Nu nämnda förhållanden ha också blivit föremål för mina undersökningar, ehuru behandlingen härav i denna framställning medtagits endast som förberedande led. Huvudvikten har lagts vid de mera individuella företeelserna. Det torde utan vidare vara klart, att rent individuella olikheter förefinnas. En lärjunge åskådliggör exempelvis av egen drift problemen i större utsträckning än en annan. Vidare plocka somliga räknare sönder problemen mera minutiöst än andra. Olikheter kunna också förekomma så tillvida, att räknearbetet hos somliga sker mera omedvetet än hos andra.

De undersökningar, för vilka här redogöres, röra sig om matematiska problem å området från folkskolans upp till drygt realskolans kurs. Försökspersonerna ha i regel utgjorts av elever vid ett landstingsseminarium. I en del specialundersökningar ha dock ett par i matematik mera försigkomna personer deltagit. Dessutom har viss hänsyn tagits till de erfarenheter och försök, som jag gjort eller anställt under en omkring femtonårig verksamhet som lärare, varvid jag handhaft undervisningen å alla områden inom matematiken från och med allra första början upp till vad som fordras för mogenhetsexamen eller något däröver.

Dessa undersökningar ha delvis företagits för att få sikte på bra och passande lösningsmetoder. I enlighet därmed har jag sökt värdesätta de olika tillvägagångssätten samt ge anvis-

ningar för hur man vid undervisningen skall kunna föra de räknande över till ändamålsenliga sådana. I fråga om formulering, inlärningssätt o. d. har framställningen i viss mån formats till kritik över rådande förhållanden härvidlag. Huvudsyftet har emellertid varit att klarlägga de psykiska betingelserna för problemlösandet.

Tidigare undersökningar på räknepsykologiens område.

Som nämnts, ha förut företagna undersökningar på räknepsykologiens område mycket litet gemensamt med de här avhandlade. För att ge en föreställning om huru i sitt slag ensamstående dessa senare äro, har emellertid en kort historik medtagits. En utförligare framställning har härvid ägnats endast de värdefullaste undersökningarna och de, som i någon mån äro likartade med mina egna. De övriga ha endast i korthet omnämnts.

Den mest omfångsrika undersökning, som verkställts med vuxna försökspersoner på räknepsykologiens område, har gjorts av B. SCHANOFF (Die Vorgänge des Rechnens). Undersökningarna utfördes 1908—1909. Schanoffs undersökningar grunda sig på själviakttagelser hos försökspersonerna; han försökte fastställa, vad dessa upplevde under räkneprocessen, hur räknandet egentligen gick till. Han inskränkte sig härvid till huvudräkning inom talområdet 1—100, emedan man, som han säger, i regel vid räkning över 100 använder sig av skriftlig räkning. Han sökte vidare så mycket som möjligt efterhärma räknandet i det dagliga livet och valde därför olika svåra uppgifter med en- och två-ställiga tal samt så, att försökspersonen (i inledande serien) ej på förhand visste, om addition, subtraktion, multiplikation eller division skulle komma. Någon gång valdes uppgifterna så, att vid addition och multiplikation resultatet gick över 100. Divisionsuppgifterna voro så valda, att de gingo jämnt upp, endast ett par med rest gåvos. Han förfor, som han säger, analytiskt till en början, i det att komplicerade uppgifter gåvos; ur denna analys framgick sedan mera elementära räkneoperationer.

I den första serien gåvos således uppgifter av följande slag: 51 minus 27; 57 dividerat med 19; 55 plus 37; 37 gånger 2 o. s. v. Försökspersonen fick före varje försök följande instruktion: »Ni skall få höra en enkel uppgift, räkna långsamt och försök efteråt noga beskriva, hur det tillgått!» Vidare var på förhand förklarat, att det var fråga om hela tal, och att uppgiften i regel låg inom första 100-talet, samt att »långsamt räknande» inte skulle vara avsiktligt långsamt men inte heller avsiktligt snabbt, utan såsom vanligen sker vid huvudräkning.

Ett exempel på de utsagor S. fick, må här anföras:

(Försökspersonen B., exempel 54 + 39). »Då 54 utsagts, föreställde jag mig talet optiskt men med viljespänning, d. v. s., den optiska föreställningen kom inte av sig självt, jag var medveten om, att om jag på något sätt ville börja med detta tal 54, så måste jag se det optiskt; jag kan säga, att först med denna optiska föreställning 54 över huvud blev uppfattat, förut var det blott ett ljud. Genom den optiska föreställningen blev ljudet först ett bestämt begrepp, vid vilket jag kunde fasthålla utan förnyade ansträngningar. Vid »plus» hade jag en lätt lustkänsla, men jag är inte så säker; vid 39 stark olustkänsla över att det skulle bli så högt tal. Så en energisk spänning för att övervinna en viss tröghet och föresats att räkna ut uppgiften. Vid uträknandet syntes 54 som något fastståendе, första våningen, så att säga, på vilken något vidare uppbyggdes; detta kom sig utan medvetandet, att addering skulle ske. 39 sönderföll i 30 och 9; det föreföll, som om dessa 30 trädde i ett slags förhållande till 54 ... så uppstod 84. Så en märkbar paus, varvid något oangenämt uppstod, med anledning av att 4 och 9 passa illa ihop vid sammanläggning. Från 84 så ett 6-steg till 90 och så med hänsyn till 9 och 6 3.»

Så ungefär tedde sig utsagorna från försöksserien. Vid analys av dem, fann S., att det var nödvändigt att förändra formen för uppgifternas givande: i stället för att förfara som vanligt, meddelades uppgifterna exempelvis så: 57, 19-dividera! Eller: multiplicera! 28, 3. Därmed trodde han sig vinna, att större hänsyn toges till totaluppfattningen och själva operationerna.

För att emellertid utröna, vilken roll optiska och akustiska element spelade, använde han utom akustisk framställning av upp-

gifterna även optisk. Alltså fick han 6 serier: a) *Akustisk framställning:* 1) Hela räknekomplex. 2) Först talen, sedan operationen. 3) Operationen först, sedan talen. b) *Optisk framställning:* 4) Hela komplex. 5) Talen först, sedan operationerna. 6) Operationen först, sedan talen.

S. särskilde vid förloppet 3 perioder: 1) Förperioden = tiden strax före uppgiftens givande. 2) Huvudperioden = tiden för uppgiftens givande och dess lösande. 3) Efterperioden = tiden strax efter lösningens utförande, under vilken försökspersonen berättade, vad han upplevat. Detta senare uppskrevs omedelbart av försöksledaren.

Vid *förperioden* (akustiska försöken, hela räknekomplex) urskilde S. 3 olika förfaringssätt: 1) Normalt förhållande, då försökspersonen väntar med spänd uppmärksamhet. 2) Ett specificerande förhållande, då medvetenhetsinnehåll av olika slag dyka upp hos försökspersonen. 3) Ett specifikt inställande, varvid medvetenhetsinnehållet stelnar och är förenat med väntan, som går i en viss riktning. Detta specifika inställande tillskriver S. stort inflytande vid uppfattandet och lösandet av en uppgift.

Under *huvudperioden* förekommo en mängd olika upplevelser hos de olika försökspersonerna, dock gör sig, säger S., alltid en sak gällande: under hela huvudperioden förmärkes ett strävande att räkna, vilket ju för övrigt är helt naturligt. Detta ifråga om vad som i allmänhet förekommer under huvudperioden. Vidare går S. in på uppfattandet av den givna uppgiften. Härvid särskiljer han 3 fall: 1) De särskilda delarna av ett exempel (uppgift) kunna uppfattas som isolerade och successivt (så uppfattade en försöksperson t. o. m. ental och tiotal särskilt för sig). 2) Beståndsdelarna kunna också uppfattas gruppvis, i det att kopulan (plus, minus etc.) uppfattas tillsamman med det första eller andra talet. 3) Slutligen kan uppfattandet ske simultant, då komplexet uppfattas som ett helt.

Som gräns mellan huvud- och efterperioden sätter S. utsägandet av resultatet, svaret å uppgiften. Därvid kunde förekomma: 1) En del av svaret utsades, innan det övriga var fullt klart. 2) Resultatet var medvetet, innan det uttalades. Förhållandet under *efterperioden* sammanfattar S. så: 1) En del av

försökspersonerna gjorde en paus före avgivandet av utsagan. 2) Längden av »protokollstiden» var olika hos olika försökspersoner. 3) Säkerheten vid utsagornas avgivande var inte alltid lika.

Vid den *optiska* (hela räknekomplex) försöksserien användes kort med tryckta siffror; mellan talen med något mindre höjd var operationstecknet placerat. Efter signalordet »nu» förflöt $^1/_2$—1 sekund, innan det hela exponerades. Under såväl räkningen som under efterperioden varade denna exposition. Detta skedde med avsikt för att möjliggöra en långvarig optisk representation och för att se, om en sådan var ensam tillräcklig för uppfattandet och lösandet av en uppgift. För övrigt var tillvägagångssättet i det stora hela lika som vid den akustiska serien. I utsagorna framhöllo försökspersonerna lättnaden under förperioden (i jämförelse med den akustiska serien) med anledning av att de hade uppgiften synlig framför sig hela tiden. Spänningen, som så ofta omnämndes i akustiska serien, övergick nu till en mildare form, väntan. Huvudperioden under dessa optiska försök karakteriserades av: 1) Det samtidiga exponerandet av hela uppgiften. 2) Vetskapen om att denna exponering var långvarig. Detta kommer ock till synes i protokollen. Angående uppfattandet och uträknandet av uppgiften sammanfattar S.: 1) Uppgiften avlästes genast. 2) Den uppfattades i ett överblickande som komplex. 3) Ett överblickande gick före avlösandet. 4) Operationstecknet blev särskilt beaktat. 5) Schemata användes sällan. Dock utsades här oftare delar av resultatet, innan hela uppgiften var löst.

Sedan S. utförligt behandlat i sitt arbete de 6 olika försöksserierna (se sid. 6!), gör han en sammanfattning och säger där bland annat att: 1) Ett sinnesgebit är tillräckligt att förmedla talen in i medvetandet. 2) Uppfattandet av uppgiften är huvudsakligen karakteriserat av betydelsemedvetande. 3) Om 2 tal stå i något räkneförhållande till varandra, så uppfattas de i enlighet med detta förhållande i deras funktionella betydelse.

Vid särläggandet av additionskomplexerna i de enskilda operationerna fann han, att de ordnade sig allt efter lättheten, som följer: 1) Tilläggande av 1. 2) Addition med resultat under 10. 3) Addition med resultatet 10. 4) Addition med resultat

över 10. 5) 7-, 8-, 9-»steg» (som ju äro specialfall av addition med resultat över 10!).

Angående lättheten i fråga om deloperationerna vid subtraktion har S. funnit: 1) Frångragning av 1. 2) Subtraktion utan övergång till lägre tiotal. 3) Subtraktion av 10. 4) Subtraktion med övergång till nästa tiotal. 5) 7-, 8-, 9-»steg».

I fråga om multiplikation säger han, att vid särläggandet av komplexerna, dels additions-, dels multiplikationsprocesser komma till synes. Angående division uttalar S. den meningen, att de enkla operationerna helt uppgå i de föregående räknesätten, såvida inte resultatet kommer »utan vidare», som associationsled i en automatisk, akustisk eller optisk serie eller kommer efter ett medvetet överslag.

Till sist sammanfattar S. (»noch einmal») undersökningens resultat i ungefär, som följer: Försökspersonens förhållande under räkningen är karakteriserat av en strävan att räkna. De sätt, varpå talen uppfattas äro mycket olika och ha stort inflytande på processen vid uppgiftens lösande. Viktigt är ock det sätt, varpå operationsförhållandet träder in i medvetandet. Vid uppgiftens lösande, vid såväl det ena som det andra räknesättet, iakttar man de speciella saker, som äro viktiga för lösningen i fråga, och utnyttjar dem. Additions- och subtraktionsprocesserna förefalla nästan alltid som lätt förståeliga och överskådliga komplexer. De framträda mestadels som systematiska och välordnade. Dock kan man inte tala om en enda enkel lagbundenhet i fråga om medvetandets innehåll, även om det är en och samma räkneart. Att vissa likheter i förfarandet vid likartade operationer förefinnas, är dock tydligt. Vid multiplikation träda de akustiska, mera sällan de optiska, associationerna från multiplikationstabellen i förgrunden men utgöra dock inte allt härvidlag. Enkla additioner komma härtill, och även det tänkande konstruerandet spelar en roll. Mycket mindre enhetlig verkar divisionsprocessen. Multiplikation och addition, sporadiskt även subtraktion, träda samman till ett komplex. Ingen enkel regel ordnar dessa komplexer, det hela är ett trevande, ett mer eller mindre bestämt prövande.

En första fylligare framställning angående de före år 1914 verkställda undersökningarna å hithörande område återfinna vi

i E. MEUMANN's nämnda år utkomna »Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik», Band 3. M. konstaterar från början, att detta område inom psykologien till väsentliga delar ännu är outforskat. Undersökningar fattas nästan eller alldeles bl. a. angående utvecklingen av talföreställningen hos barn samt analyserandet av barnens räknearbete.

I sammanhang med att M. talar om den naturliga utvecklingen av talföreställningen hos barn, kommer han in på striden mellan förfäktarna av talbildsmetoden och räknemetoden (Zählmethode), den förra ett åskådliggörande av rumlig art, den senare av tidlig karaktär. Den förra riktningen vill ju som bekant vid den första räkneundervisningen utgå från åskådliga talbilder, den andra lägger huvudsaklig vikt vid räknandet, d. v. s. uppradande i tidsföljd på sätt, som sker exempelvis vid begagnandet av den allbekanta kulramen. Emellertid bör det ju påpekas, att elementena, kulorna, även här kunna grupperas i talbilder.

M. framhåller, att ett ursprungligt uppfattande av exempelvis en talbild är psykologiskt otänkbart. All ursprunglig taluppfattning måste ske genom räknande. Simultan uppfattning måste genom erfarenhet förvärvas. En motsatt uppfattning har bland andra, som bekant, LAY (Führer durch den Rechenunterricht der Unterstufe).

Några av räknemotodicis invändningar mot ensidigt användande av talbildsmetoden må här anföras. Medvetandet är för trångt för att ett flertal intryck samtidigt skall kunna uppfattas. Tre eller fyra streck eller punkter o. s. v. äro maximum. Är det ett större tal, som skall åskådliggöras, måste det ändock alltid först bli ett räknande av talbildens element. Härtill må anmärkas, att man med förståndig gruppering bör kunna komma till simultan uppfattning även i fråga om större tal, låt vara, att det måhända delvis blir ett räknande. Vidare gäller satsen om medvetandets trånghet även beträffande de successiva intrycken.

Räknemetodici mena vidare, att de barn, som undervisas enligt talbildsmetoden, hänga så fast vid talbilderna, att de inte kunna lära sig att räkna abstrakt. Men även om det är svårare att komma över till abstrakt räkning från talbilderna,

kan man dock anmärka häremot, att det också har sina svårigheter att övergå till abstrakt räknande i andra fallet.

Motståndarna till talbildsmetoden mena också, att man icke kan åskådliggöra de elementära räkneoperationerna medelst talbilder. Häremot kan emellertid invändas, att man genom att använda delbara eller rörliga talbilder mycket väl kan åstadkomma ett sådant åskådliggörande. Praktiskt användbara härvidlag äro dessa dock naturligtvis endast vid behandling av små tal, vid den allra första undervisningen således.

Räknemetoden skulle ha följande fördelar. Medan man sysslar mera med verbala intryck, kommer man lättare över till abstrakt räknande. Metoden är bäst passande för den förhärskande föreställningstypen, den akustiska eller den akustiskmotoriska. (Är det så säkert, att denna föreställningstyp är förhärskande?) Det successiva räknandet är lättare för de svagare lärjungarna. Uppmärksamheten hos barnen hålles lättare vid makt. Härtill må anmärkas, att uppmärksamheten bör kunna bli intensiv även vid användande av talbilder, om nu dessa göras rörliga. Sant är emellertid, att man vid undervisningen av mycket svagt begåvade barn misslyckas, om man enbart använder talbilder.

Så räknemetodens nackdelar. Den är mindre åskådlig än talbildsmetoden och ställer större krav på minnet. Vidare passar den ej bra ihop med den visuella föreställningstypen.

Som man ser, komplettera de bägge metoderna varandra. Det är ju ej heller omöjligt att kombinera metoderna. Detta kan ske exempelvis genom att låta barnen själva uppbygga talbilderna. Härigenom komma också de motoriska momenten till sin rätt.

För att kunna bygga räkneundervisningen på psykologisk grund, fordras, enligt M., ett icke ringa antal förundersökningar. Man måste lära känna de allmänpsykiska hjälpföreteelserna, som komma i betraktande vid uppfattandet av tal och vid ett första opererande med tal. Man måste lära känna utvecklingen av talföreställningarna och talbegreppen hos barn. En psykologisk analys av talföreställandet och räknandet, en jämförande undersökning av nybörjare och vuxna måste genomföras. Ett klargörande beträffande räkneförmåga och matematisk begåv-

ning erfordras. Det ena är ej det samma som det andra. Vidare måste man fastställa en normalprestation för barn allt efter utveckling, dels så, att en normalbegåvning fixeras för varje levnadsålder, dels så, att normalprestationer i de särskilda räkneoperationerna angivas, som motsvara levnadsåldern.

I detta sammanhang omnämner M., att DEUCHLER (Zeitschr. f. päd. Psych., 13. Jahrg., Heft. 1, 1912) givit viktiga impulser för undersökningar av hithörande art. D. söker vinna riktlinjer för försök bland barn ur den logiska analysen av talbegreppet och går ut från analys av talserien. Vidare omnämnes en undersökning av K. ECKHARDT (Beobachtungen über das Zahlenverständnis der Schulrekruten. Zeitschr. f. exp. Päd. 8, 1909), som samlat statistiskt material angående talföreställningar hos barn i tidigaste skolåldern. M. framhåller, att olikheter härvidlag kunna bero på inflytande från barnens omgivning. Enligt MONTESSORI skall fyraåringen vara hemmastadd inom hela första tiotalet. Meumann påpekar vidare, att talföreställningen hos barn utvecklas genom räknande, ett ursprungligt, rent simultant uppfattande är ju psykologiskt otänkbart. Emellertid varnar han för att tro, att barn verkligen räkna, då de vid tidig ålder upprepa en inlärd ramsa tal, exempelvis från ett till tio. Detta är ordrabbel och ingenting annat.

Utvecklingen av talbegreppet måste enligt M. fortgå i två riktningar. 1) Det logiska innehållet och därmed inblicken i talsystemet måste allt fullständigare förstås av barnen. 2) Talbegreppet måste lösas från sitt åskådliga underlag. Räkneoperationerna (de elementära) måste bli alltmer associativt-reproduktiva, mera rent mekaniskt-minnesartade, vilket är nödvändigt för att man skall raskt och säkert kunna utföra praktiska uppgifter. Men även det matematiska tänkandet måste utbildas. RUSCHKE har beträffande dessa förhållanden antagit, att det existerar fyra särskilda abstraktionsgrader: 1) Åskådligt räknande (kulor o. d.); 2) bildligt (punkter o. d.); 3) sinnebildligt (siffror); 4) rent huvudräknande. Att svagtbegåvade endast med stor svårighet kunna komma över den första av dessa grader framgår av en undersökning av K. ECKHARDT (Zeitschr.

f. Kinderf. XIV, 1908, okt.). För övrigt är ju detta en allbekant sak.

Bland övade vuxna försiggå de elementära räkneoperationerna rent verbalt. Vid uppgifter ur exempelvis multiplikationstabellen reproduceras endast orden; intet åskådliggörande förekommer därvid i regel. Endast om den mekaniskt-minnesartade processen av en eller annan anledning »stockar sig», man »kommer av sig», går man utöver det rent verbala förloppet.

Meumann redogör till sist för några smärre experimentella undersökningar, som ha verkställts i och för psykologisk analys av räknandet. Däribland märkas »Visuelle Einnerungsbilder beim Rechnen» av K. ECKHART, »Die Zahlauffassung beim Schulkinde» av v. K. BRANDENBERGER, »Psychologie und mathematischen Unterricht» av D. KATZ.

Samma år som Meumanns Vorlesungen etc. utkom, inflöt en längre artikel (A contribution to the pedagogy of arithmetic) på hithörande område av E. C. MCDOUGLE i The pedagogical seminary (June 1914). Denne har gjort ett försök att sammanföra de nyare undersökningarna i fråga om aritmetik samt att ur dem få fram bättre metoder för praktiskt skolbruk. Sammanfattningen utgöres av 22 punkter, varur en del må anföras:

Aritmetiken är ett av huvudämnena i hela den civiliserade världens skolor.

Barn visa intresse för tal redan vid slutet av fjärde året. I sexårsåldern, vid inträdet i skolan, ha de kännedom om talen upp till 8 eller 10.

En del pedagoger anse, att uppfattandet av talen bör ske simultant (grupper av föremål), andra hålla på den successiva metoden (räknande).

Ingen definitiv korrelation har kunnat påvisas mellan de primitiva och civiliserade folkens talsystem.

Både primitiva folk och barn ha naturlig tendens att symbolisera. Detta gör, att en symbolisering av talen blir lätt.

Somliga pedagoger vilja ej ha med räkneundervisningen under den allra första skoltiden. Andra fasthålla vid det allmänt brukliga sättet (räkneundervisning från första början). Med

hänsyn till barnens tidiga intresse för tal bör de senares åsikt vara riktig. Erfarenheter från Montessoriskolor peka i samma riktning.

Pubertetens inflytande på intresse och förmåga i fråga om aritmetik har tydligt kunnat påvisas. Lärare böra ägna noggrann uppmärksamhet åt denna sak.

»Drill» har befunnits vara utomordentligt värdefull för utvecklandet av färdighet på området. Korta »drill»-perioder äro ändamålsenligare än längre med samma totalsumma tid. Den permanenta effekten av »drillen» har visat sig vara större, än man förmodat.

Barn ha benägenhet att begå vissa typfel. Dessa böra omsorgsfullt beaktas av lärare samt bli föremål för kraftig »drill»-behandling. Mycken tid förstöres, därigenom att man behandlar saker, som redan äro uppklarade, i stället för att rikta energien på att reda upp de särskilda svårigheterna.

Om uppgifterna behandla situationer från barnens egen erfarenhet, blir det hela mera intressant för dem. Problemens ordalydelse måste ägnas stor uppmärksamhet.

Stora individuella olikheter förefinnas hos barn beträffande räkning. Somliga hysa den största motvilja, andra ha den största lust för ämnet. Intryck från hem, skola o. s. v. synas härvidlag verka determinerande.

Flickor synas reda sig bättre beträffande praktisk övning i fråga om beräkningar; gossar klargöra talförhållanden o. d. skarpare.

Yngre skolbarn ha ej samma förmåga av uppmärksamhet och koncentration som äldre.

Filosofiska spörsmål angående abstrakta och konkreta tal böra ej förekomma i »grades». Sådana distinktioner må vara hur viktiga som helst; nyttiga och behövliga äro de härvidlag icke.

Muntlig räkning bör bedrivas i stor utsträckning i de lägre »grades» och får ej heller försummas i de högre. Huvudräkningen har ett värde, som aldrig kan ersättas av penna och papper.

Algebra och geometri böra införas, så snart man kan ha verklig nytta därav.

Vid utarbetandet av läroböcker i aritmetik skall hänsyn tagas till praktikerns, psykologens och pedagogens erfarenheter och kunskaper. Genom en sådan kombinering skulle man kunna få till stånd en långt mera praktisk och lärorik bok.

Som vi se, gäller McDougles artikel räkneundervisningen i barndomsskolan. Utöver vad som anförts, har den dock ej större intresse.

Under slutet av och efter 1914 har inte mycket tillkommit inom räknepsykologien. Uppsatserna på området ha varit både fåtaliga och fåsidiga.

Samma år som här förut omnämnda arbeten eller uppsatser av Meumann och McDougle utkommo, inflöto några små artiklar (ehuru ej av dem berörda) i pedagogiska tidskrifter. Bland författarna må nämnas H. WALSEMANN (Zahlbildung und Finger, Zeitschr. f. päd. Psych. u. exp. Päd.), E. WILK (Die Systemmethode des Rechnens, Die Deutsche Schule), STEFAN v. MA'DAY (Fähigkeit des Rechnens beim Menschen und Tiere, Zeitschr. f. angew. Psych.), HAHN och THORNDIKE (Some results of practice in addition under schoolconditions, The Journ. of Ed. Ps., February), I. SPRINGER (samma tidskrift B. 5, H. 7), E. L. THORNDIKE (Measurement of Ability to solve arithmetical problems, The Pedagogical Seminary, Dec.).

Under 1915 utkom mycket litet på området. Av författarna till några små uppsatser må nämnas: O. WOESTE (Die Behandlung der Dreisatzaufgaben, erläutert an Ausschnitten aus Lehrproben. Lehrproben und Lehrgänge), B. KERST (Über die mathematischen Hausarbeiten in den Mittelklassen höheren Schulen. Lehrpr. u. Lehrg.), W. S. MONROE (A Test of the Attainment of First High School Students in Algebra, School Review 23), W. LÜDERS (Beiträge zur Psychologie und Methodik des Kopfrechnens, Würzburger philosophische Dissertation), G. DEUCHLER (Alters- und Begabungsunterschiede in der Rechenfertigkeit, Archiv f. Päd., H. 5. o. 6).

Räknefel och därmed sammanhängande företeelser ha blivit studerade av E. HYLLA (Analyse von Rechenfehlern. Ein Beitrag zur psychologischen Vertiefung der Schularbeit. Zeitschr. f. päd. und exp. Päd., Heft 7—8 u. 9). Undersökningsmaterialet utgjordes av räknearbeten av 38 gossar från

»der Sexta eines Realgymnasiums». Några exempel på de uppgifter, som förelades må anföras:

$$13\,000\,102 - 954\,009;$$

$$52\,040\,871 - 26\,338\,570;$$

$$a = 10\,600;\ b = 17\,408;\ \text{beräkna } a - b!;$$

$$26\,541 + x = 83\,512;\ \text{vad är } x;$$

$$6\,830 \,.\, 4\,800.$$

H. lade märke till, att många skrivfel förekommo. (Uppgifterna voro uppskrivna å svarta tavlan, stora siffror och tydliga tecken.) Så t. ex. skrevs i stället för 3 874—21 387 421. Den felskrivande, menar H., hade velat ta detta i ett drag. Möjligen skulle det också, ehuru mindre troligt, kunna bero på att minustecknet förbisågs.

Så skrevs $826 + 311 - 911$ i stället för $826 + 311 - 916$. Här skulle en »perseverirende Tendenz» ha gjort sig gällande.

H. går inte närmare in på frågan om skrivfelen men anmärker, att en undersökning angående avskrivandet av siffror skulle vara fullt lika intressant som Stolls bekanta undersökning »zur Psychologie der Schreibfehler».

En del räknefel syntes vara alldeles oförklarliga. I fråga om andra kunde man emellertid spåra orsaken. Ibland förväxlades minuend och subtrahend. Så t. ex. i fråga om 2 357 016 — 138 004, som uppställdes och uträknades så här:

$$\begin{array}{r} 138004 \\ -2357016 \\ \hline 1780988. \end{array}$$

Ofta förekommo fel så tillvida, att addition räknades i stället för subtraktion. Då fel i motsatt led sällan förekommo, drog H. den i och för sig riktiga slutsatsen, att addition är lättare än subtraktion.

Som exempel på glömska anför H., att vid multiplikation den slutliga additionen fick anstå:

$$\begin{array}{r} 3805 \cdot 36 \\ \hline 11415 \\ 22830. \end{array}$$

Vidare att faktorn tagits med i addition:

$$\begin{array}{r} 1120 \cdot 46 \\ 4480 \\ 6720 \\ \hline 163520. \end{array}$$

Åtskilliga fel torde ha begåtts med anledning av att ungefär hälften av lärjungarna ej voro fullt vana vid den österrikiska subtraktionsmetoden (utfyllnad från subtrahenden till minuenden). Denna metod användes nämligen, dock sedan förövningar företagits.

Även en del fel på multiplikationstabellens område förekom, t. ex. $6 \times 3 = 12$; $4 \times 8 = 24$. Ligger då detta i uppgiftens egen art? 4×8 förekom ej oftare än andra uppgifter, snarare tvärt om. H. tror, att det berodde på förefintligheten av associationen beträffande 6×4 (4 ingår i 24). Så och med $6 \times 3 = 12$ (6 ingår i tolv). Vid specialundersökningar med multiplikationstabellen enbart visade det sig, att alla svar voro riktiga. Fpna hade vid dessa försök tydligen varit starkare inställda på denna begränsade uppgift.

Till sist anför H. exempel på hur »ofullständig korrektur» kunnat vara orsak till fel. Så vid följande subtraktion:

$$\begin{array}{r} 1300102 \\ \hline -954009 \end{array}$$

Feluppställningen hade tydligen observerats från början. (Strecken mellan 9 och 3 samt 9 och 2 angiva, att så varit förhållandet.) Emellertid hade fpn underlåtit att skriva om och

trott sig gå i land med uppgiften i alla fall. Det lyckades dock inte att undantränga »associationsmomentet», att man skall dra ifrån den siffra, som står rätt ovanför.

I »Lesenschwäche und Rechenschwäche der Schulkinder im Lichte des Experiments» (Abhandlungen aus den Grenzgebieten der Pädagogik und Medizin, Heft 7, 1916) tar P. RANSCHBURG upp frågan om »Rechenfähigkeit und Begabung» och omnämner, att bland mer än 1 000 undersökta svagtbegåvade barn ej fanns ett enda, som kunde anses fullvärdigt i aritmetik.

Vidare redogör R. för resultatet av en jämförande undersökning av 15 goda eller medelmåttiga räknare från första klassen i elementarskola och 15 barn ur en hjälpklass. Undersökningen rörde sig i regel inom första tiotalet; i addition var summan högst 11. R. får i en del fall liknande resultat, som jag kommit till i en undersökning, för vilken jag redogjort i Svenskt arkiv för pedagogik (Individuella räknetyper, Sv. ark. f. ped., Band III, 1915). Även R:s anordningar vid undersökningarna voro i mångt och mycket lika. R. kommer bl. a. till det resultatet, att ingen räkneoperation, hur enkel den än må vara, sker *rent* mekaniskt. (I min nämnda uppsats framhålles, att olikheten beträffande reaktionstiden måste bero på olika mekaniseringsgrad.)

För övrigt utkommo under 1916 endast några få smärre uppsatser å området. Nämnas må D. STARCH (A scale for measuring ability in arithmetic), E. E. WATSON (The college freshman and mathematics), C. D. MEAD och ISABEL SEARS (Additive subtraktion and multiplicative division tested, alla i The Journ. of Ed. Psych., 1916) samt H. O. RUGG (The Experimental Determination of Standards in First Year Algebra. School Review 24: 1916).

Av hithörande undersökningar, publicerade 1917, må endast nämnas MARGARET V. COBB (A preliminary study of the inheritance of arithmetical abilities. The Journ. of Ed. Psych., January).

I min förut nämnda uppsats (Individuella räknetyper. Svenskt arkiv för pedagogik, Band III, 1915) redogöres för undersökningar på huvudräkningens område. Undersökningarna gåvo

som resultat bl. a., att vissa typiska förfaringssätt användas. Åtminstone visade sig förhållandet vara så, om försökspersonerna räknade ett flertal exempel i följd. Beträffande addition (ex. 27 + 36) kunde tre särskilda typförfaranden påvisas:

1) 27 + 3 = 30;
36 — 3 = 33;
30 + 33 = 63.

2) 27 + 30 = 57;
57 + 6 = 63.

3) 20 + 30 = 50;
7 + 6 = 13;
50 + 13 = 63.

Enligt det första sättet sker, som synes, en utfyllnad till närmaste tiotal. Efter andra förfaringssättet tages andra termens tiotal och lägges till hela första termen, varefter andra termens ental adderas. I sista sättet sammanläggas först de jämna tiotalen, så entalen, varefter de bägge summorna adderas.

Motsvarande tillvägagångssätt förekom också i subtraktion. Även beträffande multiplikation och division kunde typiska förfaringssätt påvisas.

I uppsatsen redogöres också för undersökningar angående orsakerna till räknetypernas uppkomst. Härvid nämnas inlärningssätt, begåvning och intresse, minne, föreställnings- och uppmärksamhetstyper som möjliga faktorer.

Undersökningarna, vari 12 försökspersoner deltogo (fyra barn i småskolans sista klass, fyra barn i folkskolans sista klass och fyra vuxna) fullföljdes sedan 1915 och 1916, då en massundersökning (närmare 1 000 skolbarn i olika åldrar) företogs. Härvid bekräftades i huvudsak, vad som framkommit i samband med den tidigare undersökningen. Av redogörelsen för massundersökningen (Huvudräkningstyper, Sv. ark. f. ped., Band I,

1918) framgår bl. a., att endast omkring 2 % av försökspersonerna räknade huvudräkning i addition enligt utfyllnadssättet, under det att 43 % räknade enligt sättet 2 och 55 % enligt sättet 3. Utfyllnadssättet användes huvudsakligen av mindre begåvade barn. Motsvarande förhållanden gjorde sig gällande beträffande de andra räknesätten.

Undersökningarnas anordning.

Som i inledningen påpekats, ha dessa mina undersökningar gällt lösandet av matematiska problem av olika svårighetsgrad: från svårare problem å folkskolans kurs till vad som fordras för realskoleexamen. Ett och annat lättare studentproblem har också medtagits.

Fpna[1] ha mestadels, och då intet annat nämnes, utgjorts av 28 personer, elever vid ett landstingsseminarium (Alla elever kvinnliga i åldern 17—25 år). Försöken ha utförts under utbildningskursen 1915—1917. Vid kursens början ägde de flesta fpna endast folkskolekunskaper i matematik. Under undersökningarnas gång inhämtade de drygt realskolans kurs.

Vid vissa undersökningar ha fpna utgjorts av andra elever vid samma läroanstalt samt av två i matematik mera försigkomna personer. Dessa sistnämnda behärskade väl de områden inom matematiken, som genomgås för mogenhetsexamen (reallinjen).

För jämförelses skull ha dessutom en hel del räknearbeten, utförda av folkskolans eller dess överbyggnaders lärjungar, granskats, ehuru dessa lärjungar egentligen inte deltagit som fpnr vid dessa undersökningar.

Samtliga fpnr ha undervisats av mig i matematik. Dessutom har jag handhaft undervisningen av seminariets elever i andra ämnen, bl. a. psykologi. Härunder har jag haft tillfälle att göra mig noga underrättad inte blott om vars och ens ståndpunkt i fråga om matematik utan också om en hel mängd

[1] Hädanefter användes för försöksperson beteckningen fpn.

andra förhållanden, som det varit av stor vikt att känna till för att resultatet av undersökningarna skulle kunna bli tillförlitligt.

Efter förundersökningar, varunder jag då och då, allt efter behov, gav instruktioner åt såväl samtliga som enskilda fpnr, förelades (optiskt, tryckta eller skrivna) några problem. Svårighetsgraden stegrades, allt eftersom fpna förkovrade sig i ämnet. Fpna anmodades att lämna såväl räkning (sifferbehandling) i detalj, som ock redogörelse för vad som tänkts under lösandet, allt skriftligt. Den tid, som anslogs åt varje problem, varierade något men utgjordes av högst 40 min. Som undersökningarna pågingo i klassrum (för alla fpna samtidigt), gavs tillsägelse om anteckning av tiden, då arbetet var färdigt, om hela den anslagna tiden (vilket sällan var fallet) ej togs i anspråk, men att detta oaktat stanna kvar och syssla med andra uppgifter, tills de 40 minuterna voro gångna. Detta för att ej de med arbetet ofärdiga skulle bli störda vid de övrigas avmarsch.

Som framgår av det föregående, gällde det för fpna att avgiva utsagor över förloppet vid räknandet. Under förundersökningarna utröntes, att fpna ej förforo på alldeles samma sätt vid utsagornas avgivande. De allra flesta ville begagna det sättet, att de, allt eftersom eller i samma mån som analysen av problemet fortgick, nedskrevo, vad de tänkte. Det var en viss lättnad, menade många, att ha det gjorda arbetet nedtecknat på papperet; faran för att glömma bort det föregående var därmed borta. Man kunde genom en blick på papperet förvissa sig om hur man förut tänkt, ifall man förirrade sig eller tappade tråden.

Några få ansågo dock, att de av nedskrivandet kommo ur tankegången; de ville lösa problemen hastigt, utan de pauseringar, som nedskrivandet medförde. Efteråt, sedan problemet var löst, menade de, kunde nedskrivas, vad de genomgått i tankarna. Som utsagorna av dessa fpnr blevo tämligen magra, ansåg jag, att utbytet skulle bli bättre, om de följde flertalets spontant valda taktik, varför de uppmanades att avgiva utsagorna under arbetets gång. Resultatet i fråga om utsagornas fyllighet blev också genast bättre, och med få undantag ansågo

fpna så småningom själva, att detta tillvägagångssätt var lika bra.

Dessa fpnr (och för jämförelses skull även några av de andra) fingo också — naturligtvis en och en — tänka högt, d. v. s. uttala, vad de under lösningens gång tänkte, varunder jag satt bredvid och samtidigt nedtecknade deras tankar samt de siffror, de under räkningens gång nedskrevo. Därigenom blevo ju fpna befriade från nedskrivandet på papperet. Naturligtvis hade jag då på förhand ytterst noga satt mig in i problemen med alla deras möjligheter i fråga om lösningssätt, så att jag lätt kunde förstå fpnas tankegång, som många gånger var behäftad med mer eller mindre svårförståeliga avbrott och utvikningar.

Sedan en mängd förundersökningar gjorts, förelades fpna, som sagt, de uppgifter, jag utvalt. Instruktionen kunde nu bli tämligen kort; under förundersökningarnas gång hade fpna kommit underfund med vad det var fråga om. Härunder försvann också all onödig spänning. Fpna hade naturligtvis från början fått klart för sig, att det ej var fråga om några betyg; dessa undersökningar skulle företagas dels i vetenskapligt syfte, dels för att vi skulle få reda på bra lösningssätt samt kunna råda bot för en mängd fel. Ingen skulle därför vara rädd för att visa sig »dum» — en sådan känsla förspordes tydligt i början av förundersökningarna —, det kunde bli till nytta för dem själva och andra, om utsagorna så troget som möjligt motsvarade, vad de i själva verket tänkt under lösningen av problemen.

Vidare skulle var och en nedskriva, vad som för övrigt i fråga om känslo- och viljeliv erfors strax före, under och strax efter varje problems lösning. Fpna anmodades att göra sitt allra bästa, för att resultatet skulle bli så bra som möjligt. Allt efter fpnas läggning gavs en detaljinstruktion här, en annan där. Jag försökte på bästa sätt sätta fpna in i förhållandena för att få fram ett tillförlitligt material.

I fråga om vissa problem fingo fpna gå tillväga som vid vanlig provräkning, med undantag att i regel endast ett problem delgavs, samt att använd tid skulle anges för varje uppgift. Dessutom ha, vad seminariets elever beträffar, samtliga fpnas vanliga provräkningar lagts till undersökningsmaterialet.

Fpna i den egentliga undersökningsklassen benämnas i det följande med nummerna 1—28. Fpnr ur annan klass kallas a, b, c o. s. v. samt de två mera försigkomna A. och D. resp.

Valet av problem är härvidlag synnerligen viktigt. Uppgifterna få ej vara för svåra, ej heller för lätta. Äro de för svåra, bli de i regel olösta, och det säger sig självt, att detta ej kan vara ändamålsenligt. Skulle de däremot vara för lätta, särskilt i sådana fall, där formler med fördel kunna användas, går det hela mera mekaniskt, »man ser med detsamma», »det står genast klart för en» (uttryck, som förekommit i utsagorna under förundersökningarna), hur uppgifterna skola lösas. Man följer så vägar, som genom grundligt inlärande och vana äro tämligen noga utstakade.

För att det skall bli ett tankearbete utav, som kan underkastas en givande analys, måste problemen, som föreläggas fpna, vara valda med synnerlig omsorg. Kan man hitta på s. k. allmänna problem, som därtill vålla även jämförelsevis duktiga räknare huvudbry (naturligtvis skola också svagare räknare äga förutsättningar att lösa dem), innan lösningssättet står klart, är detta mycket fördelaktigt. I fråga om de allmänna problemen givas större svängrum, bättre tillfälle för den enskilda fpn att använda just sitt säregna tillvägagångssätt, då ej någon särskild formel klavbinder. För jämförelses skull ha dock även något formelproblem som ock en sifferuppgift delgivits.

Då dylika allmänna problem föreläggas, behöver man ej heller vid bedömandet av utsagorna och räknearbetet ta så stor hänsyn till fpnas olika ståndpunkt. Att jag i detta hänseende lyckats välja rätt väl, bevisas därav, att det ibland inträffat, att styva räknare använt lika lång eller t. o. m. längre tid för lösandet av en uppgift än mindre försigkomna. För övrigt ha fpna under undersökningarnas gång blivit allt jämnare i fråga om räkneförmåga.

De tio uppgifterna, som förelades fpna vid huvudundersökningarna, voro följande:

1) En bonde fick av en granne penningar för att i staden köpa 67 kg. vetemjöl, men som priset på detta hade stigit,

fattades honom därtill 1,34 kr., han köpte därför blott 61 kg. och fick då 22 öre över. Vad var priset på 1 kg. mjöl?

2) Frans och Adolf spelade med kulor. Frans vann först av Adolf alla hans kulor. Då gick Adolf och köpte ytterligare 24 kulor och började sedan åter spela med Frans, varvid han vann av honom tillbaka alla de kulor, som han förut förlorat och 16 kulor till, varefter spelet upphörde. Då hade Frans 30 kulor och Adolf 57 kulor. Huru många kulor hade vardera från början?

3) $$\frac{\frac{2{,}7}{3} - 6\frac{7}{8} \cdot 0{,}1 + 0{,}9}{2\frac{2}{3} : 3\frac{3}{7} + \frac{0{,}3 : 0{,}15}{9}} = x.$$

4) Ett spannmålsförråd skall forslas till staden. Tages det i 12 lass, måste man lägga 2 hl. mer på varje lass, än om det tages i 13 lass. Hur många hl. utgjorde förrådet?

5) På ett stycke tyg förtjänar man 30 %, om det säljes till 11,05 pr m. Till vilket pris för m. kan tyget säljas, om man nöjer sig med 20 % vinst? (Givet i realskolexamen h. t. 1913.)

6) En öppen cylindrisk bägare utan lock skall förgyllas på insidan. Vad kostar förgyllningen efter ett pris av 1 kr. pr cm^2, om bägarens inre mått är: diametern 114 mm. samt höjden 17,5 cm.? (Givet i realskolexamen v. t. 1911.)

7) I 250 svenska enkronor finns det 1,5 kg. rent silver. Hur mycket väger ett sådant mynt, då dess silverhalt är 80 %? (Givet i realskolexamen v. t. 1914.)

8) På en järnväg med dubbla spår mötas ett snälltåg och ett godståg. Det förra är 93 m. långt och går med en hastighet av 16 m. i sek. Det senare är 232 m. långt och går 9 m. i sek. Hur lång tid åtgår för tågen att fullständigt passera varandra? (Givet i realskolexamen h. t. 1908.)

9) Vid en eldsvåda sattes i gång en spruta, vars behållare innehöll 500 liter vatten. 3 min. senare började man ösa vatten däri med 2 kärl, av vilka det ena rymde 8 och det andra 8,5 l. Det första tömdes 9, det andra 8 ggr i minuten. Då sprutan

varit i gång i 20 min., var den tom. Hur mycket vatten utkastade den i minuten? (Givet i mogenhetsexamen — latinlinjen — v. t. 1905.)

10) Man kan transportera 10 tunnor vete, 12 tunnor råg och 15 tunnor havre en väglängd av 6 mil för 76 kr. Om nu frakten på denna led beräknas blott efter vikt och väglängd, och 4 tunnor vete väga lika mycket som 3 tunnor råg och lika mycket som 5 tunnor havre, hur många tunnor vete kan man då transportera där 10 mil för 50 kr.? (Givet i mogenhetsexamen — reallinjen — v. t. 1901.)

I det följande angivas ovan anförda exempel såsom ex. 1, ex. 2 — — ex. 10.

Följande tabell utvisar, huru de olika fpna lyckats vid uträknandet av uppgifterna (r = rätt, f = fel resultat, o = räkningen outförd, — = ej deltagit).

Vid början av utbildningskursen ägde de flesta fpnr inte mer än folkskolekunskaper i matematik. Sedan behövliga delar av folkskolekursen genomgåtts och teorierna angående ekvationer av 1:a graden med en obekant inhämtats under början av kursen, förelades angivna uppgifter med tämligen jämna mellanrum. Som siffrorna i tabellen angiva, ha problemens svårighetsgrad ej ökats fullt så mycket som fpnas räkneförmåga — procenttalen för rätt lösta uppgifter stiga i tämligen jämn följd från det 1:a till det 10:e problemet. Att procenten för rätt räknade uppgifter i början blivit så låg, beror emellertid till en del på att fpna då ofta räknade fel på rena bagateller. T. o. m. fel i fråga om multiplikationstabellen förekommo vid lösandet av de första uppgifterna. Efter större träning minskades sådana slags fel betydligt.

Av tabellen synes vidare, att fpna, särskilt i början, ingalunda varit lika styva räknare. Resultaten (rätt räknade uppgifter) för de särskilda fpna variera mellan 40 och 100 %. Medeltalet är 69 %. Av fpna ha 15 st. nått över denna medelprocent, 13 st. ha stannat under. Dessa procentsiffror stämma f. ö. förhållandevis rätt väl överens med de matematikbetyg, som fpna erhöllo. Av de lösningar, som betecknats med o (ej utförda lösningar, vilka ju äro ett försvinnande fåtal), ha vid denna beräkning i procent sådana, som med all sannolikhet

Tabell 1.

Fpn	Ex. 1	Ex. 2	Ex. 3	Ex. 4	Ex. 5	Ex. 6	Ex. 7	Ex. 8	Ex. 9	Ex. 10	Antalet rätt räkn. ex. i procent	Avvikelse fr. medelprocenten (69)
1	f	f	r	r	r	r	f	r	r	r	70	+ 1
2	r	r	r	r	f	r	r	r	r	f	80	+11
3	r	f	f	f	f	r	r	f	r	f	40	−29
4	r	f	r	r	f	f	r	f	—	r	56	−13
5	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	100	+31
6	r	f	r	r	r	f	r	r	r	r	80	+11
7	f	f	f	o	r	f	r	o	f	r	40	−29
8	r	r	r	r	r	f	r	r	r	r	90	+21
9	f	r	f	r	f	r	r	o	f	f	40	−29
10	f	f	r	r	f	f	r	r	r	r	60	− 9
11	o	r	f	r	r	r	f	f	r	r	60	− 9
12	f	r	f	r	f	r	r	f	r	r	60	− 9
13	r	r	r	f	r	r	f	r	r	r	80	+11
14	f	f	f	r	f	r	r	o	r	r	50	−19
15	f	f	f	r	r	f	r	r	r	r	60	− 9
16	f	r	o	f	r	r	r	r	r	f	50	−19
17	f	f	r	r	r	r	r	r	r	r	80	+11
18	r	r	f	r	r	r	r	r	r	r	90	+21
19	r	r	r	f	r	r	r	r	r	r	90	+21
20	f	r	f	r	r	r	r	f	r	r	70	+ 1
21	f	r	r	r	f	r	r	r	r	r	80	+11
22	f	r	f	f	r	f	r	o	r	f	50	−19
23	r	f	—	—	r	r	r	r	r	r	88	+19
24	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	100	+31
25	f	f	f	r	r	r	f	r	r	r	60	− 9
26	r	r	r	r	f	r	r	r	r	r	90	+21
27	f	r	f	r	r	—	r	f	f	r	56	−13
28	f	f	r	r	r	r	f	r	r	r	70	+ 1
Antal rätt räkn. ex. i %	43	57	52	78	60	74	79	71	91	82	69	

skulle ha blivit rätt lösta, om fpn fått tillräcklig tid på sig, hänförts till gruppen rätt lösta uppgifter, andra utförda, där fpn tydligen kommit in på fel väg, till gruppen orätt lösta.

Av utsagorna och av utfrågningar har framgått, att först en period kommer, varunder fpn väntar på vad som skall komma, undrar över hur hon skall lyckas o. s. v. Dit kan ock hänföras den första orienterande genomläsningen. Så kommer en huvudperiod, varunder det egentliga arbetet utföres. Sedan så lösningen är färdig, inträder en efter-period, varunder fpn mediterar över lösningens riktighet, problemets svårighetsgrad o. s. v. Att dra någon bestämd gräns mellan de olika perioderna torde dock knappast vara möjligt.

Vidare har man tydligt kunnat se, att fpna, som naturligt är, sökt sönderdela problemen i särskilda, enklare beståndsdelar. En analys således. Visserligen har denna analys ej skett lika grundligt och minutiöst hos alla. (Detta har framgått tydligt vid jämförelse mellan de olika utsagorna angående samma uppgift.) Hos ett fåtal fpnr t. o. m. märktes inte mycket av analysen; hela det komplex, som utgöres av problemet, har inte undergått just någon medveten upplösning. Liksom intuitivt eller på måfå har fpn huggit in någonstädes, utan att egentligen kunnat göra sig reda för, varför så skett. En del däremot ha söndersmulat uppgiften grundligt, liksom gnagt bit för bit på det tankeproblem, som representeras av uppgiften. Många intogo dock en mellanställning; en tydlig analys om ock ej så utomordentligt grundlig. Sedan denna blivit verkställd, har något delparti av problemet angripits, varvid detta delparti antingen genast eller efter ytterligare sönderdelning satts i samband med andra — en syntes —, för att fpn så småningom skulle få reda och ordning på det hela, d. v. s. för att så småningom kunna lösa uppgiften. Men om det allmänna tillvägagångssättet har varit sådant, så förefunnos dock olikheter i många väsentliga detaljer.

Har man då hos fpna kunnat finna några sådana olikheter, skilda förfaringssätt, som i regel gått igen hos en och samma fpn vid lösandet av de olika uppgifterna? Och kan man med fog ge företräde, ge större värde åt ett visst tillvägagångssätt,

jämfört med ett annat? På dessa frågor skola vi med ledning av de 28 fpnas utsagor över de anförda uppgifterna försöka ge svar.

Problembehandlingen röner emellertid inverkan av vissa faktorer av huvudsakligen yttre karaktär. Problemens formulering och egen beskaffenhet, den använda räknearten, problemens svårighetsgrad, inläsningssätt o. s. v. äro sådana faktorer.

För att utröna i vilken mån dessa förhållanden spelade in vid problembehandlingen, anställdes särskilda försök. De anordnades så, att fpna indelas i två (någon gång flera) likvärdiga grupper. Vid denna indelning i grupper förfors så, att fpna ordnades allt efter procent rätt räknade uppgifter (samtliga provräkningar, som varit före, togos i betraktande) med den bästa räknaren först, så den näst bästa o. s. v. till den sämsta. Så fördes n:r 1 till den första gruppen, n:r 2 till den andra, n:r 3 till den första, n:r 4 till den andra o. s. v. eller också n:r 1 till den första gruppen, n:r 2 och n:r 3 till den andra, n:r 4 till den första o. s. v. Det gällde naturligtvis att få medelprocenten för de båda grupperna så lika som möjligt.

Det gällde exempelvis att utröna, vilken inverkan formuleringen hade på problembehandlingen. Problemen (samma matematiska operationer) delgåvos i två (någon gång flera) formuleringar. Den ena gruppen förelades den ena, den andra den andra formuleringen. Så anställdes »utsagoförsök» på sätt, som förut angivits.

Vidare anställdes vanliga räkneförsök, varvid den ena gruppen förelades en av formuleringarna av problemet, den andra en annan. Fpna skulle som vid vanlig provräkning avlämna alla detaljräkningar, samt ange tiden, som åtgått för varje exempel. I regel förelades endast ett exempel åt gången och för övrigt under så lika förhållanden som möjligt. Klart är, att de förelagda problemen voro alldeles obekanta för fpna. Av tidssiffrorna och rätt- eller felprocenten erhölls på detta sätt en mätare på problemens (d. v. s. de olika formuleringarna o. s. v.) svårighetsgrad.

Då det är av stor vikt för bedömandet av resultaten av huvudundersökningarna (rörande de individuella olikheterna) att få klargjort, hur dessa yttre faktorer inverka, och i vad mån man kan eliminera bort dem, ha försöken angående dessa här behandlats först.

Problembehandling och uppgifternas formulering.

Bl. a. förelades följande tre formuleringar för fpna (dessa voro uppdelade i tre likvärdiga grupper):

Formulering 1: 27 man erhöllo 3 kr. om dagen; 53 av samma arbetslag lägre dagspenning. Beräkna denna, då veckoavlöningen var 1122 kr.!

Formulering 2: En arbetsgivare anställde ett antal arbetare. De kunnigare arbetarna, som voro 27, erhöllo 3 kr. om dagen. De övriga, som voro 53, erhöllo lägre dagspenning. Hur mycket fick var och en av dessa om dagen, då veckoavlöningen för samtliga uppgick till 1122 kr.?

Formulering 3: Enär skördearbetet brådskade, anställde en godsägare ett antal extra arbetare. Han ämnade först ge dessa extra arbetare samma betalning, 3 kr. pr dag, som godsets förutvarande jordbruksarbetare. Men det befanns, att somliga av de nyantagna voro ovana och ej kunde utföra så värdefullt arbete som de andra. Det bestämdes då, att de sämre arbetarna, som voro 53, skulle få nöja sig med lägre dagspenning. De bättre av de nyantagna skulle erhålla den dagspenning, som godsägaren ursprungligen ämnat ge alla. Hur stor dagspenning erhöllo de sämre extra arbetarna, då veckoavlöningen för alla nyantagna uppgick till 1122 kr., och då de bättre arbetarna av dessa voro 27?

Som synes, är det samma problem; det matematiska uttrycket och uträkningen bli i alla tre fallen lika. Ha då de olika grupperna haft samma arbete vid lösandet, eller erbjuder den ena framställningen större svårigheter än den andra? Det följande ger svar på frågan.

Först må då anföras några typiska utsagor[1] från de egentliga fpnas tre grupper:

Fpn 27 (Formulering 1): »— — — jag undrade på uttrycket '53 av samma arbetslag', om de 27 voro inräknade där eller inte. Men det är väl inte så. Det gäller nog att få reda på huru mycket de 53 förtjänade. Men det står ju, att de fingo 1122 kr. Då skulle exemplet vara löst, men det kan ju inte vara möjligt. Det menas nog, hur mycket var och en fick. Nå, det ska snart vara uträknat. 1122 delat med 53 (så följer uträkningen av detta). Men detta blir ju mycket mer än 3 kr., och de skulle ju få mindre. Hur ska det förklaras? Får väl läsa igenom uppgiften noga. Varför nämnas de 27 arbetarna? Ska de kanske räknas med? Förmodligen är det så. 1122 är väl för allesamman. Då får jag dra ifrån de 27 arbetarnas avlöning. Det blir 27 . 3. Men det var ju en hel vecka, det glömde jag alldeles bort förut. Alltså 27 . 3 . 6 = 486. Så 1122 — 486 — — —».

Fpn 11 (Formulering 2): »— — — Under det jag läste, fann jag, att de 27 arbetarnas avlöning skulle dras ifrån 1122 kr. Det blir 27 . 3, som ska dras ifrån. Kom att tänka på att det var 6 dagars betalning, således 27 . 3 . 6. Det blir 486 kr. Detta ska dras ifrån. Resten ska de 53 arbetarna ha, d. v. s. 636 kr. Så mycket får de på 6 dagar och på en 106 kr. 53:delen därav eller 2 kr. blir den efterfrågade dagspenningen — — —».

Fpn 15 (Formulering 3): »— — — och såg, att det var ett förfärligt långt och tråkigt exempel. Svårt att få reda i det här. Nej, det var för många slags arbetare. Men jag är väl tvungen att börja på nånstans. Måste läsa igenom ett slag igen. Under läsandet föll det mig in, att jag skulle klara upp de 27 arbetarna först. De fingo ju 3 kr. om dagen. Ska se efter, att det verkligen var så. Jo, det tycks vara 3 kr. Men

[1] Med undantag av vissa ytterst små språkliga förändringar (i fråga om interpunktion, utskrivandet av förkortningar o. s. v.) föreligga utsagorna här i ursprungligt skick. Utsagornas första och sista delar, behandlande för- och efterperioden resp. av problembehandlingen, uteslutas här, enär de i detta sammanhang ej ha något intresse. De innehålla intryck från tiden före och under genomläsandet av uppgiften samt efter lösningens verkställande.

de förutvarande arbetarna? Det här får jag ingen klarhet i! Tråkigt att läsa igenom igen, men det finns ingen annan råd. 27 . 3 = 81. 81 kr. skulle dessa ha förtjänat. Kom att tänka på att det var en vecka, som väl var. Alltså blir det 81 . 6 = 486. Så mycket för de 27. Men hur skall jag sen bära mig åt? Får väl läsa igen. 1122 fingo de allihop. Således 1122 — 486 = 636, som skall delas med 6 för att få för en dag. Detta ska sen delas med 53 — — —».

Om man jämför utsagorna, finner man, att formuleringarna 1 och 3 resp. vållat mera besvär än formuleringen 2. Varpå kan då detta bero? I 1 synes fattigdomen på ord göra det svårare. »Veckoavlöningen för *samtliga*» saknas i denna formulering och har också i regel vilselett räknarna. Visserligen förekommer uttrycket »av samma arbetslag», som ju bör sammanställas med veckoavlöning och ger samma betydelse, men denna formulering är ovanligare och inte alls så tydlig som den i 2.

Av utsagorna att döma synes för övrigt formulering 1 sakna de inställande momenten, som finnas i 2 och 3. Sifferuppgifterna komma för brådstörtat, utan att det är klart, vad det är fråga om. Ehuru »om dagen», »arbetslag» och »dagspenning» ge åtskilligt vid handen härvidlag, synas de räknande ej enligt 1 ha blivit så ledigt införda i situationen som enligt 2.

Men denna inställande del av formuleringen kan också bli för lång och vidlyftig. Detta är tydligen fallet i 3. Denna formulering är av allt att döma alltigenom för långrandig. En del onödiga detaljer förekomma, som endast försvåra räknearbetet. Man har svårt att dra fram det väsentliga ur den vidlyftiga texten. Detta har gått igen hos samtliga fpnr. Visserligen kan det ju tyckas, som om problemet skulle bli åskådligare, därigenom att de förekommande uppgifterna bli fylligare; man borde ju bli mera insatt i händelseförloppet. Detta kan ju vara sant, men för räkningen är denna fyllighet fullkomligt onödig och genom sin ordrikedom också tyngande och skadlig.

En sak, som vållat de anförda tre fpna besvär, är, att de ej fått klart för sig eller glömt bort, att det var veckoavlöning, ej dagavlöning. Visserligen har ingen av dem kommit fel, men problemet hade otvivelaktigt lösts på kortare tid, om ett för-

tydligande, exempelvis »6 arbetsdagar i veckan» fogats till. Det var endast en enda, som räknat med 7 dagar i stället för 6, och tillägget hade måhända ej behövts av denna anledning. Men förefintligheten av uttrycket skulle helt säkert förhindrat, att många fpnr i mer eller mindre grad blivit försinkade i arbetet på grund av att de gjort sig skyldiga till förbiseende av samma slag, som återkommer i utsagorna här förut.

Samma problem har delgivits några andra fpnr i inte mindre än åtta olika formuleringar. Därvid visade sig formulering 2 med tillägget om 6 arbetsdagar vara den lättförståeligaste och ge bästa resultatet vid räkningen.

Så till räkneförsöket beträffande det anförda problemet med dess tre olika formuleringar. Grupp 1 delgavs formulering 1, grupp 2 formulering 2 och grupp 3 formulering 3. Resultatet framgår av följande tabell.

Tabell 2.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räknade ex. i %
Grupp 1	14,5	66,7
Grupp 2	7,8	88,9
Grupp 3	15,3	77,8

Under det att grupp 2 i medeltal använde 7,8 min., behövde fpna i grupp 1 och 3 ungefär dubbelt så lång tid. Det förefaller kanske en smula egendomligt, att den korta formuleringen 1 krävt så lång tid. Men om man tar den här förut anförda typiska utsagan i betraktande, erhålles förklaring. Vederbörande ha på grund av den korta och därigenom ej fullt så tydliga texten kommit fel, vilket upptäckts, först sedan ett visst arbete utförts och en viss tid förrunnit. Visserligen ha de allra flesta kommit rätt till sist, men ett par fel får dock helt säkert tillskrivas den svårare analysen beträffande formuleringen. Medeltal procent rätt räknade ex. är för denna grupp 66,7.

Att grupp 3 skulle behöva relativt lång tid med sin formu-

lering, förefaller ju naturligt. Hithörande förut anförda utsaga ger också vid handen, att det vållat mycket besvär att leta fram de väsentliga partierna av den ordrika texten. Tiden för denna grupp är också den längsta, 15,3 min. Rättprocenten är 77,8.

Problembehandlingen är av detta att döma avsevärt beroende av formuleringen. Räknearbetet får mera irrande karaktär, om formuleringen ej är tillfredsställande. Den blir irrande beträffande allt för kort formulering därför, att räknarna ej fullt fatta innebörden av uttrycken (de må sedan vara fullt riktiga i språkligt avseende), enär dessa äro allt för abstrakta och inte alldeles så vanliga och lättförståeliga. Svårförståeliga uttryck kunna ju också förekomma i relativt ordrik text, men det är svårare att enkelt och tydligt formulera en uppgift, då ordantalet skall närma sig minimum.

Även vid för ordrik text blir räknearbetet lätt irrande. Man har att dras med en del oväsentliga eller rent av obehövliga detaljer. Innan dessa hinna elimineras, ha många avvikelser hunnit eller måst göras. Vidare kan räknearbetet (åtminstone för nybörjare) få en irrande karaktär, på grund av att ett kort, klargörande, inställande uttryck, som med ens för den räknande in i situationen, saknas.

Formuleringen måste vara avpassad för den räknandes ståndpunkt, i varje fall får den inte vara onödigt svår. Vad de i dessa undersökningar deltagande fpna beträffar, har framgått, att stor oklarhet — i mycket större utsträckning än man skulle ha trott — förefunnits i fråga om mera abstrakta, mindre vanliga ord och uttryck. I regel torde man i våra skolor överskatta elevernas utveckling och förmåga härvidlag. Kommer så härtill, att formuleringen innehåller en anhopning av bestämningar (exempelvis en massa bisatser), blir den språkliga analysen ännu svårare att utföra.

I detta sammanhang ligger det nära till hands att fråga sig, om våra läroböcker i räkning hålla måttet beträffande problemens formulering. Den, som gör sig besvär med att genomforska hithörande läroboksliitteratur, finner alldeles visst en del problem med otymplig text i våra äldre läroböcker. Erkännas måste, att man i de yngre synes ha strävat efter, att ge problemen en klar och lättförståelig formulering. Emellertid kunde

och borde det vara åtskilligt bättre, vilket torde framgå av det följande.

I »Lärobok i räkning för realskolan» (Möller, Larsson och Lundahl, tryckår 1910, ex. 610 å tredje årsklassen) återfinnes följande uppgift: — En husmoder köpte 24 kg. lingarn à 2,60 kr. pr kg. för att därav låta väva lärft. Av varje kg. garn erhåller hon 5,5 m. lärft, och hon betalar väverskan 30 öre pr m. Hur dyr blir varje m. lärft? —

Problemet förelades i denna formulering den ena gruppen (fpna voro indelade i två likvärdiga grupper). En typisk utsaga:

Fpn 14: »— — — Får väl försöka räkna ut hur mycket de 24 kg. kostade. Det är $24 \cdot 2{,}60 = 62{,}40$. Hon erhöll 5,5 m. av varje kilogram. Alltså $24 \cdot 5{,}5 = 132$. Men nu ser jag, att det är fråga om priset pr m. och ej för alltihop. Vävningen kostade 0,30 kr. Ett kg. garn kostade 2,60. Av ett kg. erhålles 5,5 m. Alltså kostar 1 m. $\frac{2{,}60}{5{,}5}$. Hela priset blir då $0{,}30 + \frac{2{,}60}{5{,}5}$. Men då kommer ju inte 24 med. Det måtte vara galet på något sätt. Får väl räkna i alla fall, som jag tänkte i början. Det kostade 62,40, och det blev 132 m. Då kostar 1 m. $\frac{62{,}40}{132} = 0{,}47$. Så lägger jag till de 30 örena — — —».

Som synes, vålla de för problemets lösning överflödiga 24 kg. åtskilligt bryderi. Det matematiska uttrycket (om nu de 24 kg. tagas med) för priset pr m. blir tydligen:

$$\frac{24 \cdot 2{,}60 + 24 \cdot 5{,}5 \cdot 0{,}30}{24 \cdot 5{,}5} =$$

$$= \frac{24\,(2{,}60 + 5{,}5 \cdot 0{,}30)}{24 \cdot 5{,}5} =$$

$$= \frac{2{,}60 + 5{,}5 \cdot 0{,}30}{5{,}5} =$$

$$= \frac{2{,}60}{5{,}5} + 0{,}30,$$

vilket visar, att uppgiften om de 24 kg. ej är behövlig.

Den andra gruppen delgavs samma problem i följande form: — Ett parti lingarn kostar 2,60 kr. pr kg. Av varje kg. garn erhålles 5,5 m. lärft; vävningen kostar 30 öre pr m. Hur dyr blir varje m. lärft? —

Problemet blir visserligen enligt denna formulering mera »opersonligt», men därmed vinnes, att de överflödiga 24 kg. försvinna. Även angående denna formulering må en karakteristisk utsaga anföras:

Fpn 25: »— — — att det var ett lätt exempel. En m. kostar ju $\frac{2,60}{5,5}$. Så de 30 örena till. Bråket går kanske jämnt upp — — —».

Här råder ingen tveksamhet angående tillvägagångssättet. Att detta till största delen berott på formuleringen, torde vara visst.

Samma formuleringar delgåvos de båda räknegrupperna på sätt, som förut angivits. (Växling och variering grupperna emellan företogos allt som oftast.) Resultatet blev följande:

Tabell 3.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	11,6	85,7
Grupp 2	5,1	100

Resultatet anger tydligt, vilken formulering som varit mest lätthanterlig. Särskilt må markeras, att formulering 1 tog så mycket längre tid. Det var den överflödiga uppgiften, som förorsakade, att problembehandlingen fick en helt annan karaktär, än om den inte hade funnits.

Ett annat problem ur samma lärobok (ex. 170, fjärde årskursen) lyder så: — Dela 80 i två delar, så att den ena delen minskad med 2 blir 7 gånger så stor som den andra ökad med 2! —

En utsaga från en fpn, som missuppfattat texten (vilket beträffande denna uppgift är mycket vanligt), lyder:

Fpn 12: »— — — Kallar jag den ena delen för x, så blir den andra $80 - x$. Den första delen minskad med 2 blir då $x - 2$. Detta skall vara lika med 7 gånger den andra delen. Men så skall det ökas med 2. Då blir väl ekvationen så här: $x - 2 = 7(80 - x) + 2$. (Så följer uträkning på vanligt sätt, varvid x blir lika med 70,5.) Ska det bli ett ojämnt tal? Jag har nog räknat fel. Får väl studera talet ett tag till. — 7 gånger den andra delen ökad med 2. — Det står ju 'ökad' och inte, som jag tyckte, 'ökat'. Vad betyder det då? Ska det minskas, innan jag tar det 7 gånger, eller hur kan det vara? Sätter opp det så, får jag se, hur det blir. $x - 2 = 7(80 - x + 2)$; $x - 2 = 560 - 7x + 14$; $x + 7x = 560 + 14 + 2$; $8x = 576$; $x = \frac{576}{8} = 72$. Nu fick jag ett bättre tal, troligen ska det vara så — — —».

Den andra gruppen erhöll följande formulering av problemet: — Dela 80 i två delar så, att om man ökar den ena delen med 2 och tar, vad man då får, 7 gånger, så blir produkten lika med den andra delen, minskad med 2. — En utsaga:

Fpn 28: »— — — Om jag nu kallar den ena delen för x, så måste den andra bli $80 - x$. Men hur ska jag få upp någon ekvation? Jo, nu fick jag det klart, det blir $7(x + 2) = 80 - x - 2$ — — —».

De fpnr, som erhöllo denna formulering, begingo intet misstag, motsvarande det som gjordes med anledning av den dunkla punkten »ökad med 2». Lärobokens formulering är visserligen språkligt riktig och uttrycker, vad som åsyftas, men ändå, kan man säga, har den inte varit fullt tydlig för fpna. (Hänsyn måste ju tagas till den ståndpunkt, fpna intogo.) Detta bekräftas av resultatet beträffande räknegrupperna:

Tabell 4.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	7,9	64,3
Grupp 2	6,7	92,9

Visserligen är tidsskillnaden inte så stor beträffande de bägge grupperna, men inte mindre än 5 fpnr ha begått samma fel, som återfinnes i utsagan här förut (fpn 12), och låtit sig nöja med det resultat, som erhållits. Den andra formuleringen inbjuder inte till motsvarande felgrepp.

I »Folkskolans räkneövningar» av K. P. Nordlund (tryckår 1900, ex. 67, sid. 160) förekommer följande problem: — En gosse skulle beräkna 786-falden av ett tal. Han erhöll till svar 5796, vilket ej överensstämde med det svar, som facitboken angav. Felet hade uppkommit därav, att gossen ordnade siffrorna, som motsvarade 6-falden, 8-falden och 7-falden av det tal, som skulle mångfaldigas, på samma sätt som vid sammanläggning. Vilket tal mångfaldigade gossen? — En karakteristisk utsaga:

Fpn 26: »— — — och tyckte, att det var ett krångligt tal. 786-falden betyder väl, att han multiplicerade 786. Emellertid blev det fel. Han erhöll 5796, som var oriktigt svar. Så långt begriper jag talet. Men sen står det stilla för mig. Han ordnade siffrorna fel. Således tycks gossen ej ha multiplicerat fel. — som motsvarade 6-falden, 8-falden och 7-falden av det tal, som skulle mångfaldigas. — Detta förstår jag inte. — falden av mångfalden. — Nej, detta kan jag ej reda ut. Får väl tänka mig, hur man kan räkna fel vid multiplikation. 786 var en faktor, så mycket är säkert. Den andra söker man. Hade han räknat rätt, så hade det blivit $786x = 5796$, där x är den sökta faktorn. Men nu räknade han fel. Han satte upp som vid sammanläggning. Nu börjar jag förstå. Han satte upp ental under ental, tiotal under tiotal o. s. v. Men de tal han fick, *var* ju 6 gånger, 8 gånger och 7 gånger faktorn som sökes. Men i talet står 'motsvarande'. Men det måste vara så i alla fall. Då är det ju inte så svårt. Han tog 7 gånger + + 8 gånger + 6 gånger faktorn. Då blir det $7x + 8x + 6x = 5766$ — — —».

Samma problem, formulerat på annat sätt, lydde så: — Ett visst tal skulle multipliceras med 786. Som svar erhölls 5796, vilket emellertid var fel. Felet hade uppkommit därigenom, att de vid multipliceringen uppkomna talen satts rätt under varandra, som vid addition. Vilket var talet? —

En utsaga därom:

Fpn 19: »— — — och läste en gång till, varunder jag fann, att den ena faktorn var känd och den andra söktes. Som svar erhölls 5796, som var fel, eftersom siffrorna uppsatts orätt. Jag antar, att 786 skulle multipliceras med 234. Då blir det så här, om jag sätter upp med samma fel:

$$\begin{array}{r} 234 \\ 786 \\ \hline 1404 \\ 1872 \\ 1638 \\ \hline 4914 \end{array}$$

4914 svarar nu mot 5796. Men 4914 är summan av $7 \cdot 234$, $8 \cdot 234$ och $6 \cdot 234$. Alltså är 5796 summan av $7x$, $8x$ och $6x$, så jag kallar talet för x. Det blir då så här: $7x + 8x + 6x = 5796$ — — —».

Det svåra i den första formuleringen synes vara det mindre vanliga uttrycket »falden». Särskilt när det blivit anhopning av dessa uttryck, har det blivit svårfattligt för fpna. Vidare har ordet »motsvarade» förorsakat tveksamhet. Formuleringen av problemet är för övrigt typiskt för författaren till den lärobok, varur det är hämtat. Att den inte är lättfattlig, är emellertid säkert.

I den andra formuleringen förekommer däremot helt vanliga uttryck. Att detta varit underlättande, har oförtydbart framgått av utsagorna och räkningarna. Påpekas bör också sättet att åskådliggöra, som fpn 19 betjänat sig av. En dylik fingerad framställning är vid somliga problem ytterst värdefull, enär man därigenom får en klar överblick av situationen.

Räknegrupperna erhöllo angående detta problem följande resultat:

Tabell 5.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	29,0	57,1
Grupp 2	18,5	78,6

Som synes, är tiden för den första formuleringen dryga 10 min. längre än för den andra. Räkneresultatet är också synnerligen dåligt för grupp 1. Anmärkas bör ock, att två fpnr i denna grupp ej hunno få något resultat under den anslagna tiden (40 min.).

Följande uppgift är hämtad från »Aritmetisk exempelsamling» av L. T. Larsson och N. Lundahl (tryckår 99, ex. 873, sid. 88): — Patron Y., som hade 225 hl. råg att sälja, blev den 1 oktober för den bjuden 8 kr. pr hl. Han ansåg detta var för litet betalat, varför han beslöt vänta med försäljningen, till dess rågpriset blev högre. Den 15 februari följande år erbjudes han 8,20 kr. pr hl., vilket bud han antager. Rågen har under tiden torkat in 2 %. Vann eller förlorade han på dröjsmålet med försäljningen, då han under tiden kunnat erhålla 5 % ränta på sina penningar? —

Denna formulering delgavs grupp 1. Grupp 2 erhöll följande: — Y. blev bjuden 8 kr. pr hl. för 225 hl. råg. Han väntade emellertid, tills han fick 8,20 kr. pr hl. Då hade rågen torkat in 2 %. Vann eller förlorade han på dröjsmålet (1 oktober till 15 februari), då han under tiden kunnat få 5 % ränta på sina pengar? —

Av utsagorna att döma har den första formuleringen verkat hämmande genom sin längd. Att det var en »patron», att »han ansåg detta vara för litet betalat», att »han beslöt» o. s. v. äro för uppgiftens lösande alldeles onödiga moment, som verka tyngande på texten. Visserligen behövas ofta några ord, som verka inställande på den räknande, men därav följer ej, att en mängd alldeles oväsentliga detaljer skola medtagas.

Räknegruppernas resultat ge stöd åt detta påstående:

Tabell 6.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	17,6	85,7
Grupp 2	15,9	85,7

Ur »Sifferräknelära» av C. A. Nyström (tryckår 96, ex. 390, sid. 41) är följande hämtat: — Erik var 18 år gammal, när han kom till en högskola. Sedan han vid utträdet där tillbragt $\frac{1}{7}$ av sin ålder, blev han jordbrukare. Hur gammal var han då? —

En utsaga:

Fpn 4: »— — — tar jag naturligtvis $\frac{1}{7}$ av 18 och lägger till, så får jag åldern, som efterfrågas. $18 + \frac{1}{7} \cdot 18 = 20\frac{4}{7}$ — — —».

Flera av fpna ha i likhet med denna ej varseblivit fällan utan helt enkelt tagit 18 som utgångspunkt. »18 år gammal» och »av sin ålder» synas ha sammanförts i medvetandet med suggestiv kraft. Uppgiften kan gott tjäna som typ för s. k. problem »med fälla». Strykes »vid utträdet», torde fällan bli ännu farligare.

Den andra gruppen delgavs samma problem under denna formulering: — Erik var 18 år, då han kom till högskolan. Sedan han där tillbragt $\frac{1}{7}$ av sin ålder (åldern, då han slutade vid högskolan), blev han jordbrukare. Hur gammal var han då? —

En utsaga härom:

Fpn 1: »— — — och tyckte, att det borde gå bra att lösa talet. Men så fick jag se, att åldern ej var 18, som man skulle ta $\frac{1}{7}$ av. Det var värre. Hur skall jag kunna teckna det? (Fpna hade ännu ej kännedom om ekvationer.) Funderade länge hit och dit utan att finna någon lösning. Så fick jag plötsligt klart för mig, att 18 var $\frac{6}{7}$ av den efterfrågade åldern. Då är $\frac{1}{7}$ 6 gånger mindre och $\frac{7}{7}$ 7 gånger mer, d. v. s. $\frac{18 \cdot 7}{6} = 21$ — — —».

Denna och andra fpnr räddades genom det uttryckliga påpekandet inom parentesen från att komma galet.

Nedanstående visar resultatet för räknegrupperna:

Tabell 7.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	5,8	50,0
Grupp 2	10,0	92,9

Tabellen anger, att formulering 1 ej krävde så lång tid som formulering 2. Orsaken härtill framgår av utsagorna. Åldersproblemet tog för många av fpna, som hörde till den första gruppen, ingen avsevärd tid i anspråk. Men i gengäld blev felprocenten så mycket större. Inte mindre än hälften (samtliga på samma sak) stupade i detta hänseende.

Följande uppgift återfinnes i »Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor» (tryckår 13, ex. 1390, sid. 103) av Alfr. Berg: — Axel roade sig med att i en rät linje utlägga längs en landsväg 12 stycken glaskulor på 1 m. avstånd från varandra. Han vill sedan nedlägga dem i en grop, som han grävt bredvid den första kulan, på det sätt, att han upphämtar och nedlägger i gropen 1 kula i sänder; hur lång väg har han gått, då han, börjande med första kulan, nedlägger den sista? —

Den ena gruppen delgavs förestående formulering. Den andra erhöll följande: — 12 stycken kulor lågo i en rät linje med 1 m. mellanrum mellan varje. Hur lång vägsträcka behöver man gå för att samla alla kulorna vid ena ändkulan, där man från början står, om man tar en kula i sänder? —

En utsaga angående den första formuleringen:

Fpn 19: »— — — undrade, om den väg, han gick vid utläggandet, skulle räknas med. Det frågas ju efter, hur lång väg han gått, då han, börjande med första kulan, nedlägger den sista. Får ta om det punkt för punkt. Det står ingenting om hur han gjorde, då han lade ut dem. — Han roade sig med att i en rät linje utlägga längs en landsväg. — Tog han då en kula i taget, och var funnos de? — Vid nedläggandet upphämtar och nedlägger han i gropen en kula i sänder. — Här står

omtalat, hur han gör. Troligen är det endast upphämtandet, som ska beräknas. Men jag är inte säker på detta. Kanske är det meningen, att han gjorde lika, när han lade ut dem också. Men jag räknar i alla fall bara med att han tog upp dem. Men var var han, då han började? Hade han grävt gropen förut, så att han möjligen var nån annanstans? Jag blir inte klar på det här exemplet. Det menas väl, att han stod vid den första kulan. Då ritar jag opp det så här:

. . . . . — — —.»

Som synes, har fpn haft rätt svårt att komma rätt på grund av oklarheten i formuleringen. Och ändå hörde denna fpn ingalunda till dem, som voro sämst i problemanalys. Flera fpnr togo också fel härvidlag och fingo därigenom ett oriktigt resultat.

Vad den andra formuleringen beträffar, förekom ingen tveksamhet i fråga om tillvägagångssättet på denna punkt. Under det att enligt första formuleringen problembehandlingen blivit irrande och osäker, har räknearbetet enligt den andra fått en helt annan karaktär.

Räknegruppernas resultat bekräfta, vad här sagts:

Tabell 8.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	15,8	64,8
Grupp 2	9,7	92,9

Som var att vänta, blev tiden väsentligt längre och felprocenten betydligt större beträffande grupp 1.

Innan vi lämna detta kapitel, må ännu ett problem tagas med. I »Aritmetik för de allmänna läroverken» av Lars Phragmén (tryckår 85, ex. 149, sid. 139) återfinnes följande: — I en cession finnas tre fordringsägare. A. har att fordra 1 750 kr., B. 2 100 och C. 2 650. Tillgångarna uppgå till 4 225 kr. Hur mycket bör var och en få? —

Detta förelades den ena gruppen. Den andra fick samma problem, varvid formuleringen ändrades endast i fråga om ett enda ord. Ordet »cession» utbyttes mot »konkurs».

En typisk utsaga angående den första formuleringen:

Fpn 20: »— — — Undrade, vad 'cession' kan betyda. Det är väl ändå så, att det är en, som inte orkar betala. Det blir ju vanlig bolagsräkning — — —.»

I utsagorna angående formulering 2 förekommer ingen motsvarande tveksamhet.

Resultaten beträffande räknegrupperna blevo, som följer:

Tabell 9.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	13,5	100
Grupp 2	12,0	100

Rättprocenten blev i bägge fallen den högsta möjliga, men den första formuleringen krävde en och en halv minut längre tid. Visserligen får man ej fästa allt för stort avseende vid den lilla tidsskillnaden, men det torde ingalunda vara förmätet att påstå, att förefintligheten av det i formulering 1 för somliga fpnr obekanta ordet »cession» varit bidragande orsak härvidlag. Det visar, hur ytterligt känsliga fpna varit beträffande formuleringen.

Problemen skola också vara praktiska, men utan att texten blir tyngande eller en mängd för räkningen fullständigt främmande saker dras med. I nyare läroböcker har man emellertid i mycket frångått sådant »åskådliggörande». Ett par prov från äldre författare må anföras (Ur Försök till lärobok i räknekonsten för allmoge och folkskolor av P. J. Pihlstrand, tryckår 1862): — En person förlorade 100 R. på spel. Nitton år därefter kom han i nöd och tänkte under ånger då: »Om jag i stället hade satt dessa penningar i sparbanken, så hade jag haft dem i behåll och ränta på ränta efter 5 %»; hur mycket skulle han då hava ägt? — En annan mera förståndig person hade 200 R.

»Dessa», tänkte han, »kunna komma mig till godo, om jag i framtiden kommer i behov.» Han satte dem därför i sparbanken och erhöll 5 % ränta, årligen lagd till kapitalet. Efter 5 år fick han njuta fördelen av sin omtanke, då han genom eldsvåda förlorade alla sina kläder. Nu tog han ut sina penningar ur sparbanken; hur mycket hade han då? —

Ehuru dessa problems formulering hör till de trevligare, har det vid anställda försök visat sig, att fpna i stort sett varit besvärade av den vidlyftiga texten. De ha i allmänhet strävat efter att se bort ifrån allt, som inte behövdes för själva uträknandet. Av förfrågningar omedelbart efter det problemen blivit lösta, har framgått, att fpna mycket litet fäst sig vid innehållet utöver det, som behövts för räkningen.

Syftet med de anförda formuleringarna har för övrigt tydligen varit att bibringa de räknande moraliska sanningar. Likartade tendenser kunna också i fråga om vissa områden komma till synes i nyare läroböcker. Man talar t. ex. om nykterhetsproblem, freds- eller krigsproblem o. s. v. Med hänsyn till det syfte, man vill vinna, bör man kanske ej säga någonting ont om dylikt, såvida nu formuleringarna, som här förut, äro trevliga. Men man bör komma ihåg, att allt, vad som på så sätt bjudes, har bra litet att göra med matematiken.

Sämre blir det emellertid, om problemen innehålla tankeexperiment av dylik art, som ej förefinnas i verkligheten. Under strävandet att få problemen praktiska, synas de ibland snarare ha blivit tvärtom. En lärobok (Huvudräkningskurs för folkskolor och nybegynnare, tryckår 1879) innehåller följande uppgift: — En lantbrukare beräknade, att om vägen till staden vore sex gånger längre, så skulle han behöva 16 timmar mer än nu för att resa dit, om han hela tiden reste $^3/_4$ mil i timmen; hur lång var vägen? —

Det är väl knappast troligt, att en lantbrukare utför sådana beräkningar. Bättre då, att helt och hållet utesluta de »praktiska» momenten. I varje fall vålla de onödigt arbete vid analyseringen.

Emellertid är det inte endast i våra läroböcker, som texten, formuleringen av problemen vålla räknarna onödigt besvär och tidsspillan. Även vid viktigare examina kunna uppgifter

förekomma, vars formulering är mindre lycklig. Några problem, givna i de senaste årens mogenhetsexamina (latinlinjen) må anföras.

Höstterminen 16 gavs följande problem: — En kommun upptager ett lån på 4 miljoner kr. mot 4 proc. årlig ränta på ränta genom lika stora årliga inbetalningar att amorteras på 40 år. Hur mycket återstår av lånet efter 20 år? —

Här är det den osvenska vändningen »genom lika stora årliga inbetalningar att amorteras», som ej bort få förekomma. Formuleringen av problemet, som förmodligen översatts från tyskan, har säkerligen kommit många räknare att i början av arbetet ställa »lika stora inbetalningar» i direkt samband med »upptager ett lån».

Vid samma matematiska skrivning förelades också följande: — Genom en diagonal till en kub med kantlängden *a* lägges ett plan, som halverar två av de kanter till kuben, som icke råka diagonalen. Sök arean av den fyrsiding, som av diagonalen utskäres ur kuben! —

Diagonalen kan tydligen ej utskära en fyrsiding. Förmodligen är det planet, som i stället åsyftas. Det är givet, att många av räknarna irrat hit och dit, innan de kommit underfund med vad som menades, om de ens någon gång gjorde det.

Ett problem, som delgavs vårterminen 17, lydde: — Om man tar logaritmen för 10 i två system, och det ena systemets bas är 10 gånger större än det andras, så blir summan 1. Vilka äro dessa baser? —

Uttrycken större än kan verka vilseledande. Det bör naturligtvis i stället vara »så stor som». Det förra uttrycket kan tydas så, att den ena basen är 11 gånger så stor som den andra. Genom den mindre lyckliga formuleringen torde också någon räknare ha trott, att summan 1 åsyftade baserna och ej logaritmerna. Problemet borde ha formulerats ungefär så här: — Summan av logaritmerna för 10 i två olika system är 1. Det ena systemets bas är 10 gånger så stor som det andras. Vilka äro dessa baser? —

Samtliga här anförda problem äro, som sagt, hämtade från latinlinjens skriftliga uppgifter. Det är knappast bättre ställt beträffande motsvarande uppgifter för realskolexamen och mo-

genhetsexamens reallinje. Och dock bör man kunna fordra, att alldeles särskild omsorg lägges vid dylika problems formulering. Det bevisar tydligt, att matematici inte ha blicken öppen för vad som fordras i fråga om det rent språkliga i problemen.

Att rent oriktiga uttryck böra utrensas ur texten till problemen, är ju självklart. Men hur är det med ordvändningar, som äro ovanliga, svåranalyserbara eller »beniga»? Utgöra inte måhända sådana uttryck rent av det väsentliga härvidlag, är inte analyserandet av dem det viktigaste vid lösandet av de matematiska problemen? Härtill måste man svara ett bestämt nej.

Antag, att en person skall översätta en tysk text till svenska. Översättningen kan bli dålig av flera orsaker. Den blir det, om personen i fråga ej är tillräckligt hemmastadd i tyska; han må fullt behärska svenskan. Den blir det också, om översättaren behandlar svenska språket illa; behandlingen av tyskan må vara hur flott som helst. Att det går galet, om det är illa beställt i fråga om båda språken, är självklart. Först om vederbörande behärskar nödiga delar av bägge språken, kan översättningen bli god.

Motsvarande förhållanden göra sig gällande vid översättningen från texten hos ett problem till matematiska uttryck. Kan inte vederbörande tyda formuleringen, så blir det heller intet matematiskt uttryck, åtminstone inte ett riktigt, kunskapen i fråga om det rent matematiska må vara hur god som helst. Detta förhållande framträder tydligt, då man sysslar med problem, som äro avfattade på främmande språk. Inte blir det heller någon översättning till matematiskt språk, om de matematiska översättningarna saknas; översättaren må hur bra som helst kunna analysera det i vanlig mening språkliga.

Härvid invändes kanske, att det vid översättning från text till matematiskt språk ej är fråga om att slaviskt översätta ord för ord. Men inte heller vid översättning från språk till språk får man använda ett sådant slaviskt tillvägagångssätt, om det skall bli en god översättning. Det är för övrigt ofta just på grund av dylik dålig översättning från huvudsakligen tysk text, som vi fått våra — dåligt formulerade problem.

Det kan ibland inträffa, att en lärjunge i en skola reder

sig tämligen bra med behandlingen av rent matematiska uttryck men är dålig problemlösare. Det är då mycket möjligt, att svårigheten att komma till rätta med problemen beror just på oförmåga i fråga om det språkliga i dem. Lärjungen erhåller ett lågt betyg i matematik, vilket i stället borde drabba honom i modersmålet.

Nu är ju sant, att till vilket ämne som helst hör en del ofta använda termer, s. k. facktermer. Dessa termer äro så intimt förknippade med själva ämnet, att okunskap i fråga om dem med rätta anses sänka vederbörandes kunskap i själva ämnet. Så är det beträffande räkningen absolut nödvändigt att känna till och kunna röra sig med termer sådana som produkt, divisor, dividend o. s. v. Men vad som av det språkliga faller utom ramen för facktermer hos ett problem, bör också behandlas som företeelser av språklig art. Detta förbises ofta av undervisare i matematik.

Som förut anförts, är det inte så alldeles väl beställt i fråga om problemens formulering. Hur bör då texten vara beskaffad? Någon har (exempelvis den i det föregående omnämnda läroboksförfattaren K. P. Nordlund) försökt att »matematisera» språket. Men försöken ha ej slagit väl ut, enär ord och ordvändningar blivit högst ovanliga och svårbegripliga.

Problemen böra avfattas på ett i allmänhet klart och tydligt (ej för många och ej för få ord) samt för den räknande lätt förståeligt språk. Analyseringen av texten får ej medföra särskilda svårigheter. Härmed är inte sagt, att den språkliga analysen av ett problem saknar betydelse. Men den skall då också anses och bedömas som en språklig företeelse. Läroboksförfattarna böra ha grundlig erfarenhet som lärare i ämnet samt blick för det psykologiska och pedagogiska och även för det praktiska och språkliga. Annars få problemen ej det innehåll och den form, de böra ha.

Hur som helst ha de här förut anförda undersökningarna tydligt givit vid handen, att problembehandlingen i väsentlig mån är beroende av uppgifternas formulering. Utsagor och räkningar ha tydligt visat, att räknearbetet just på grund av olikheter härvidlag kunnat få helt olika karaktär.

Problembehandling och uppgifternas natur.

I mina förut berörda undersökningar (Individuella räknetyper, Huvudräkningstyper) påvisades, att vissa särskilda tillvägagångssätt mer eller mindre utpräglat användas vid huvudräkning på angivet område. Men huru förhåller det sig i fråga om problemlösningen? —

Vid de nämnda undersökningarna delgåvos för jämförelses skull även några problem, som dock voro av mycket enkel beskaffenhet. Ett sådant exempel lydde: — I ett mejeri tillverkades ena dagen 36 kg. och andra dagen 48 kg. smör. Hur många kg. tillverkades under de båda dagarna?

Vid lösandet av så enkla problem kunna ju ej variationerna utöver själva sifferbehandlingen bli så synnerligen stora. Visserligen kan en viss skillnad förefinnas — exempelvis mer eller mindre åskådligt föreställande av det, som problemet bjuder på —, men ramen är dock tämligen trång, och problemets enkla beskaffenhet ger ej rum för tillkomsten av några avsevärda olikheter. Man får vid räknandet av dylika uppgifter genast klart för sig, att det är fråga om ett visst räknesätt, och så är man inne på operationer av den art, som behandlats i de nämnda undersökningarna.

Men hur ställer det sig i fråga om svårare problem, där ett avsevärt arbete måste presteras, innan man lyckats »översätta» detsamma till matematiskt språk, innan man hunnit »teckna» uppgiften? Kommer därvid några karakteristiska förfaringssätt till synes?

Helt naturligt inbjuder ofta problemets egen art till ett visst förfaringssätt vid lösningen. Vi skola anföra några utsagor å problem för att belysa detta förhållande.

Följande uppgift delgavs fpna: — Om 8 murare på 4 dagar kunna lägga en 24 m. lång mur, hur lång mur av samma bredd och höjd som den förra kunna då 7 murare lägga på 6 dagar? (Räknelära etc., Alfr. Berg.) —

Ett par utsagor:

Fpn 5: »— — — såg över exemplet och tyckte mig finna, att det var en regula de tri-uppgift. Läste så igenom uppgiften långsamt och blev övertygad om att det var ett sådant slags exempel, som jag förmodat. Det är sammansatt regula de tri. Detta blir ej svårt att lösa. Jag ska naturligtvis sätta upp på vanligt sätt. Det är fråga om murare, dagar och m. Då blir det så här:

mur.	d.	m.
8	4	24
7	6	?

Satte upp detta i den ordning, som uppgiften angav. Funderade ett ögonblick på uttrycket 'samma bredd och höjd som den förra'. Undrar, om det möjligen är en fälla. Sätter så upp till uträkning — — —» (Uträkningen skedde på vanligt sätt).

Fpn 27: »— — — Läste talet två gånger men kom inte riktigt underfund med det ändå. Det frågas ju efter längden på muren. Om jag skulle räkna ut, hur mycket en murare kunde lägga. Eller om jag skulle ta reda på hur mycket som lades på en dag. Det är bestämt ett regula de tri-tal. Det var bra, att jag fick syn på det. Då är det ju att sätta upp samma sort under vartannat. Låt se, det är fråga om murare, dagar och meter. Då får jag:

8	murare	4	dag.	24	m.
7	»	6	»	?	»

Men är detta rätt nu? Bäst att se efter ett tag. Jo, det var 8 murare och 7 murare, 4 dagar och 6 dagar, 24 m., och så frågas det efter m. Således ska frågetecknet stå under 24. Jag tror, att det är rätt uppsatt. Nu ska jag skriva upp 24 först (uträkning på vanligt sätt) — — —».

Som vi se, äro de två utsagorna rätt så överensstämmande. Och ändå äro dessa de, som gå mest isär av de 28 fpnas utsagor. Visserligen förekomma smärre olikheter i de här anförda. Fpn 27 är mera trevande än fpn 5. Men det dröjer inte länge, förrän även fpn 27 får klart för sig, att det är fråga om regula de tri. Och så fort som detta framstår tydligt, blir resonemanget tämligen lika med den andra fpns utsaga, som för övrigt mest liknar flertalets. Problemet tillhör en viss typ, och då den räknande kommit till insikt härom, går han tillväga på vanligt sätt (förutsatt naturligtvis, att dylika uppgifter räknats förut). Ramen är för trång för att medge några större variationer. Några större olikheter i fråga om tillvägagångssättet komma ej till synes.

En ränteuppgift delgavs samma fpnr: — A. hade lånat av B. 560 kr. mot 3,75 % årlig ränta. Huru mycket skulle han betala, när han efter 288 dygns förlopp ville återbetala lånet? (Ur Lärobok etc., Möller, Larsson och Lundahl.) —

Ett par av de mest olika utsagorna angående denna uppgift:

Fpn 3: »— — — Då jag fick se ordet 'ränteuppgift', tänkte jag, att det kanske är ett ej så svårt räntetal. Läste så vidare. Tyckte, att det ej såg så rysligt krångligt ut men var ej säker på hur jag skulle räkna. Man ska ju alltid ha med 100 i sådana tal. 100 ger 3,75. På hur lång tid? Jo, på ett år eller 365 dagar. Nej, ett år i sådan räkning är 360 dagar.

100 3,75 360

Så ser jag efter, vad som var kapital. Det är 560. Det ska väl stå under 100. 288 ska stå under 360. Då blir det så här:

100	3,75	360
560	?	288

Glad över att jag kommit så långt. Nu sätter jag upp 3,75 ovanför strecket (uträkning på vanligt sätt) — — —.»

Fpn 13: »— — — varvid jag såg, att det var ett ränteproblem. Här har man att göra med kapital, ränta och tid. Sätter då upp på vanligt sätt:

k.	r.	t.
100	3,75	360
560	?	288

Så mycket (3,75) på 100 kr. Huru mycket på 1? (Räkning på vanligt sätt) — — —.»

Fastän, som sagt, dessa två utsagor hade de största olikheterna, äro de dock tämligen ensartade. Den första visar, att ett visst trevande rått hos den räknande — förfaringssättet har tydligen ej stått alldeles klart från början —, dessutom förekomma känslomoment (»Glad över» etc.), men tillvägagångssätten äro för övrigt mycket lika. Uppgiften är en typisk ränteuppgift, som fordrar ett typiskt tillvägagångssätt, som ej ger rum för så stora utvikningar.

Variationerna bli ej heller så stora —, om dylika uppgifter lösas med användande av ekvationer. Sedan de 28 fpna genomgått denna räkneart med en obekant samt tillämpningar därå, förelades bl. a. följande problem: En växel på 750 kr., som förfaller till betalning om 4 månader, och en annan å 840 kr. inlösas nu med sammanlagt 1 577 kr., varvid diskont för båda växlarna beräknas efter 5,3 %. När förfaller den senare växeln till betalning? (Realskoleexamen 09.) —

Ett par utsagor:

Fpn 2: »— — — sett på exemplet en smula, fick jag klart, att det var fråga om ränteräkning eller diskonträkning. Skrev upp ränteformeln $\left(r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}\right)$, som jag utan svårighet erinrade mig. Erinrade mig så, att räntan beräknas på den summa, som står på växeln, vilken summa är den största. Alltså fick han för den första växeln $750 - \frac{750 \cdot 4 \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12}$ (= räntan) och för den andra $840 - \frac{840 \cdot x \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12}$ (= räntan). x är lika med tiden, som sökes, i månader. Detta är alltså, vad han fick, men detta var ju också 1 557 kr. Således få vi ekvationen $750 - \frac{750 \cdot 4 \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12} + 840 - \frac{840 \cdot x \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12} = 1\,557$. Därpå förkortade

jag — — —.» (Uträkningen, som anmärktes i utsagan »ha gått helt mekaniskt», erbjuder i detta sammanhang intet särskilt av intresse.)

Fpn 15: »— — — Tyckte det var svårt, emedan det var fråga om två växlar. Läste genom exemplet flera gånger. Tänkte lösa talet med regula de tri, som jag lärde mig i folkskolan, men då det var 2 växlar, och jag brukar räkna fel även med regula de tri (fpn hörde verkligen till de sämre räknarna i sin klass), började jag tänka på att få upp en ekvation. Som jag satt så, kom jag att skriva upp $r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$. Men hur skall den kunna användas här? Kom så ihåg, att man får mindre för en växel, än vad som står på den. Räntan skall ju dras bort. Tyckte åter, att exemplet var svårt, och trodde knappt, jag skulle kunna lösa det. Kom så efter mycket funderande ihåg, att räntan skall beräknas på den summa, som växeln har. Räntan skulle då bli på den ena växeln lika med räntan på 750 kr. undet 4 mån. efter 5,5 %; $r = x$, $k = 750$, $p = 5{,}5$, $t = \frac{4}{12}$. Alltså är $r = \frac{750 \cdot 4 \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12}$. För den ena växeln erhölls således $750 - \frac{750 \cdot 4 \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12}$ eller 736,25. Om jag nu kunde få reda på hur mycket som erhölls för den andra. Läste om uppgiften men fann till min ledsnad, att det frågades efter tiden. Så föll det mig in, att om jag droge 736,25 från 1 557, så skulle jag få reda på hur mycket som erhölls för den andra växeln. $1\,557 - 736{,}25 = 820{,}75$. — Så mycket erhölls för den andra växeln. Men hur skall jag nu få reda på tiden? Trodde, att jag i alla fall ej skulle kunna räkna ut talet. Efter mycket grubblande kom jag under fund med att växelns summa, minskad med räntan borde bli lika med vad som erhölls för den. Men hur stor var då räntan? $r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$; $r = x$, $k = 840$, $p = 5{,}5$, $t = ?$ Ja, vad är tiden? Jag har ju ett x förut. Men det frågas ju efter tiden, alltså måste t sättas $= x$. Är inte säker på det här men tecknar i alla fall $840 - \frac{840 \cdot x \cdot 5{,}5}{100 \cdot 12} = 820{,}75$. Se-

dan räknade jag ut — — —.» (Fortsättningen kan här uteslutas.)

Ehuru dessa båda utsagor angående förfarandet efter vad jag kunnat finna av samtliga 28 gå allra mest isär — flertalet liknade den första —, framträder dock tydligt, att båda räknarna uppsökt ränteformeln $\left(r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}\right)$, som så kommer att bli stöd eller utgångspunkt för tämligen likartade operationer. D. v. s. vid uppgifter, vars lösande fordra användningen av en viss formel eller ett alldeles speciellt tillvägagångssätt, kan inte gärna flera, i någon högre grad olika förfaringssätt komma till synes. Visserligen förefinnas ju en hel del olikheter i de anförda utsagorna. Så t. ex. tycks den 1:a fpn ta det mera åskådligt, hon talar om en »han», som »erhöll», oaktat ingenting därom står angivet i uppgiften, och visserligen synes det, som om det delvis gått mera omedvetet, åtminstone ej så målmedvetet, till hos den 2:a (därpå tyda sådana uttryck som »det föll mig in», »kom så ihåg» o. s. v.), och vidare är vid lösningen enl. den senare utsagan uppgiften uppdelad på ett annat sätt o. s. v., men bägge fpna uppsöka eller intvingas snart i ränteformeln, och så blir lösningen tämligen enahanda. Så har skett hos samtliga dessa fpnr, och dock är denna uppgift tämligen komplicerad. Hade det t. ex. varit fråga om endast *en* växel eller ett enkelt räntetal, hade naturligtvis utsagorna blivit än mer likartade.

Detta framgår också av utsagorna angående en annan uppgift, som förelagts samma fpnr. Exemplet lydde: — Efter vilken % äro 400 kr. utlånade, då de på 4 mån. lämna 7 kr. i ränta? — I stort sett var förfaringssättet hos samtliga fpnr detsamma. Ett par typiska utsagor må här anföras.

Fpn 6: »— — — och fann, att det var ett vanligt räntetal. Alltså sätter jag upp efter ränteformeln $r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$. Således får jag så här: $7 = \frac{400 \cdot x \cdot 4}{100 \cdot 12}$. Därpå tar jag — — —.» (Uträknandet följer sen på vanligt sätt.)

Fpn 23: »— — — jag fick se '%', trodde jag, att det var

fråga om ränteräkning, och satte upp $r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$. Såg igenom uppgiften, varpå jag skrev $r = 7$, $k = 400$, $p = x$, $t = \frac{4}{12}$. Satte så upp ekvationen $7 = \frac{400 \cdot x \cdot 4}{100 \cdot 12}$ samt löste den så här — — —. Var alldeles säker på att jag hade räknat rätt och tyckte, att uppgiften var mycket lätt — — —.»

Som vi se, inriktas tankarna genast på ränteformeln, och sedan det blivit klart, att denna kan användas, blir räknearbetet hos de olika fpna ganska lika, för övrigt tämligen mekaniskt, mest hos dem, som bäst behärska området i fråga.

Ett hastighetsproblem, givet i mogenhetsexamen (latinlinjen), delgavs några av fpna. Exemplet lydde: — Två personer reste med oförändrade hastigheter under 4 timmar olika vägsträckor, nämligen den ena 8 mil mer än den andra; han använde nämligen 5 minuter mindre på milen än den sistnämnde. Huru långa voro de båda vägsträckorna? — Ett par utsagor.

Fpn 5: »— — — Läste först genom problemet helt flyktigt och fann, att det var ett problem på hastighet. Läste så om ifrån början, varunder $v = h \cdot t$ (vägen = hastigheten ggr tiden) framträdde i medvetandet. Sedan jag läst en del av exemplet, började jag skriva upp $v_1 =$; $h_1 =$; $t_1 =$ (storheterna angående den första) samt $v_2 =$; $h_2 =$; $t_2 =$ (storheterna angående den andra), i det jag lämnade rum för ifyllnad efter likhetstecknet. Läste så vidare, så att jag fick se, varefter det frågades, samt beslöt att sätta $v_1 = x + 8$; $v_2 = x$; $h_1 = \frac{1}{y - 5}$; $h_2 = \frac{1}{y}$; $t_1 = 4 \cdot 60$; $t_2 = 4 \cdot 60$. Alltså ekvationerna

$$x + 8 = \frac{1 \cdot 4 \cdot 60}{y - 5}; \qquad x = \frac{1 \cdot 4 \cdot 60}{y}.$$

Så tog jag ur 2:a ekvationen värdet på y $\left(y = \frac{240}{x}\right)$ och insatte i den 1:a ekvationen — — —.»

Fpn 23: »— — — jag läst igenom exemplet, varunder jag fann, att det var ett hastighetsproblem, ritade så (här följa

några åskådliggörande linjer). Utan att vidare ha tänkt på saken hade jag således definierat x som den vägsträcka, den andre reste; satte så upp så här enl. $v = h \,.\, t$:

I	II
$v_1 = x$	$v_2 = x - 8$
$h_1 = \frac{1}{y}$	$h_2 = \frac{1}{y + 5}$
$t_1 = 4 \,.\, 60$	$t_2 = 4 \,.\, 60$

Då hastigheterna skulle sättas upp, funderade jag en stund, om dessa skulle sättas y och $y + 5$ resp., men fann, att det blev galet, och kom på det klara med att det skulle vara som ovan. Vid ifyllande av tiden i schemat, väckte det min undran, om inte detta var onödigt att ta med, då tiderna voro desamma för bägge. Alltså ha vi:

$$x = \frac{1}{y} \,.\, 4 \,.\, 60.$$

$$x - 8 = \frac{1}{y + 5} \,.\, 4 \,.\, 60 \qquad \text{och}$$

$$y = \frac{240}{x} - \cdots$$

Även här inriktas således arbetet på att utnyttja formeln, som rätt så tidigt dyker upp i medvetandet. Sedan det blivit klart, att det är ett hastighetsproblem, söker man uppleta nödiga uppgifter i exemplet för att instuva dessa i formeln. Visserligen kan man därunder vid mera komplicerade uppgifter stöta på svårigheter, så att det hela ej utföres så mekaniskt (så t. ex. enligt sista utsagan, där hastigheten ej var alldeles så lätt att riktigt placera in i formeln). Emellertid är det vid sådana här typexempel, vars lösande tämligen regelrätt fordrar ett speciellt förfaringssätt eller tillämpande av en viss formel, inte så stort svängrum för tankarna, inte så stora olikheter i tillvägagångs-

sätt. Naturligtvis får man då förutsätta, att den räknande förut inhämtat nödig kännedom angående dessa vanliga lösningsmetoder.

Läroboksförfattarna bruka också gruppera räkneuppgifterna allt efter deras karaktär. Så i fråga om regula de tri-uppgifter, räntetal, vinst- och förlustproblem, problem angående rabatt och diskont, bolagsräkning, blandningsuppgifter, rörelse- eller hastighetsproblem o. s. v. Meningen med ett sådant arrangemang är måhända inte alltid så klar. Emellertid är det ju ej så ovanligt, att vid undervisningen genomgå vissa typexempel rätt så grundligt och så hänvisa lärjungarna till likartade exempel i läroboken.

Dessa kunna nämligen lösas på likartat sätt som de genomgångna typexemplen. Räntetalen gå ju efter schemat: räntan = = kapitalet × procenten × tiden genom 100 $\left(r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}\right)$. Ex.: — Hur stor är räntan på 420 kr. för 36 dagar efter 4,5 %? — Därav erhålles: $x = \frac{420 \cdot 4{,}5 \cdot 36}{100 \cdot 360}$.

Problem angående vinst och förlust ordnas så: försäljningspriset = inköpspriset ± en viss % av inköpspriset (+ vid förtjänst; — vid förlust). Ex.: — Hur mycket har en cigarrhandlande betalt för cigarrer, som han med 20 % vinst säljer till 7,50 kr. pr låda? — Härav får man: $7{,}50 = x + \frac{20x}{100}$.

Vid problem angående varurabatt kunna uppgifterna ordnas sålunda: det erlagda beloppet = det begärda — en viss % av det begärda. Ex.: — Hur mycket skall en person kontant betala, om han å en vara, för vilken begäres 32 kr., erhåller 6 % rabatt? — Härav: $x = 32 - \frac{6 \cdot 32}{100}$.

Diskont- eller växelproblem lösas på liknande sätt. Växelbeloppet — en viss ränta (eller diskont) å samma belopp = vad som erhålles för växeln. Ex.: — En växel å 300 kr. diskonteras 45 dagar före förfallodagen efter 6 %. Huru mycket erhålles för den? — Här erhålles: $300 - \frac{300 \cdot 6 \cdot 45}{100 \cdot 360} = x$.

Uppgifter å bolagsräkning lösas antingen enligt regula de tri-sätt (ex. härå i det föregående) eller rent analogiförfarande $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$. Ex.: — Ett bolag utdelade 12 500 kr. Bolagssumman utgjorde 100 000 kr. Hur mycket av vinsten fick en person, som hade tillskjutit 2 400 kr. ($a = 2\,400$; $b = 100\,000$; $c = x$; $d = 12\,500$) — Härav: $\frac{2\,400}{100\,000} = \frac{x}{12\,500}$.

Blandningsuppgifter (silver-, guld- och andra blandningar) lösas enligt schemat: ren metall ± ren metall = summa eller skillnad ren metall. Ex.: — En guldsmed sammansmälte 60 gr. 12-lödigt och 72 gr. 15-lödigt silver. Hur fin blir blandningen? — Rent silver i första satsen $= \frac{12 \cdot 60}{16}$, i andra satsen $= \frac{15 \cdot 72}{16}$. Rent silver efter sammansmältningen $= \frac{x(60 + 72)}{16}$. Alltså: $\frac{12 \cdot 60}{16} + \frac{15 \cdot 72}{16} = \frac{x(60 + 72)}{16}$.

Rörelse- eller hastighetsproblem ha redan berörts (vägen = hastigheten × tiden). Ex.: — Hur lång tid behöver man för att med en hastighet av 6,5 km. i timmen tillryggalägga 46,8 km.? — Härav: $46{,}8 = 6{,}5x$.

Obligationer och aktier bruka också i räkneböckerna bilda en grupp, ehuru uträkningen av hithörande problem inte är alldeles så ensartad. Även beträffande geometriska uppgifter bruka likartade uppgifter sammanföras i grupper.

Våra läroboksförfattare tala också om s. k. allmänna problem. Därmed menas sådana, som ej låta sig inrangeras i någon av de i läroböckerna vanliga, här förut anförda grupperna. Dock skulle man även bland dessa problem kunna plocka ur vissa uppgifter, som gott skulle kunna bilda grupper för sig, enär deras lösning är rätt så karakteristisk.

Hit höra s. k. rörtal. Ex.: — En damm kan fyllas medelst tvenne tillopp på 20 timmar. Om det ena av dessa tillopp är ensamt öppet, fylles dammen på 30 timmar. Hur lång tid behöver det andra tilloppet för att ensamt fylla dammen? —

En typisk utsaga angående detta problem må anföras:

Fpn 16: »— — — Här måste jag se efter, hur stor del av dammen blev fylld under 1 timme, då ena tilloppet är öppet. Om det dröjer 30 timmar att fylla dammen med detta, så blir det $\frac{1}{30}$ under 1 timme. Och om det dröjer 20 timmar för bägge tilloppen, så blir det $\frac{1}{20}$ av dammen på 1 timme, om båda rören äro öppna. Nu frågas det efter, hur lång tid det åtgår för det andra röret. Antag att det dröjer x timmar. På 1 timme bör det väl bli x gånger mindre, nej, $\frac{1}{x}$ blir det. Hur ska jag nu få nå'n ekvation? Jag kom ingen vart en stund, men så fann jag, att det måste bli så här: $\frac{1}{30} + \frac{1}{x} = \frac{1}{20}$. Vad som kom in i det ena röret + vad som kom in i det andra på en timme måste bli lika med vad som kom in genom bägge rören på en timme — — —.»

Till samma typ kunna räknas s. k. arbetstal. Ex.: — S. kan fullgöra ett visst arbete på 12 dagar och P. uträtta samma arbete på 15 dagar. Huru många dagar åtgå till arbetets utförande, om båda arbeta gemensamt? — Förfaringssättet blir här enahanda. Naturligtvis förutsättes, att vederbörande räknare någon gång förut erhållit kännedom om det vanliga lösningssättet beträffande dylika uppgifter.

En annan grupp bland de allmänna problemen utgöres av s. k. klocktal. Ex.: — Hur mycket är klockan, då visarna på ett ur stå mitt över varandra mellan siffrorna 8 och 9? — Dessa uppgifter kunna ju hänföras till rörelse- eller hastighetsproblem och lösas då på sätt, som förut angivits, om nu den räknande behärskar nödiga delar av ekvationsläran. Men även utan användande av ekvationer bli lösningarna av sådana problem tämligen ensartade.

De te sig ungefär så här (angående det anförda ex.): — Minutvisaren går 12 gånger så fort som timvisaren. Minutvisaren har således gått 12 delar, medan timvisaren gått en del. Vägen från 8 till det ställe, där visarna stå mitt över varandra, är således en del. Då måste vägen från 12 till 8 vara 11 delar (man utgår ifrån, att klockan är precis 8). Från 12 till 8 = 40 min. Alltså är 40 = $\frac{11}{12}$ av den väg, minutvisaren tillryggalagt,

tills visarna komma mitt över varandra, och det sökta antalet min. över $8 = \frac{40 \cdot 12}{11}$.

Även andra mer eller mindre typiska uppgifter, som i läroböckerna bruka hänföras till allmänna problem, skulle kunna påvisas. Men det anförda må vara nog och klargör tillräckligt tydligt, att förfarandet vid räkningen är i hög grad beroende av problemets karaktär. Detta gäller särskilt sådana problem, som höra till någon viss kategori, som kunna lösas enligt någon generell metod, varom den räknande på förhand erhållit kännedom.

I detta sammanhang må påpekas, att det naturligtvis har sin stora betydelse att vid undervisningen grundligt genomgå vissa för de olika kategorierna typiska uppgifter. Härigenom erhåller lärjungen överskådlighet och ett välbehövligt stöd vid lösandet av de många ugpgifterna.

Emellertid kan det vara förenat med en viss risk att uppdela allt för mycket. Särskilt svagare räknare frestas då att i tid och otid slaviskt följa typexemplens lösningssätt utan att riktigt inträngа i de särskilda uppgifterna. Mekaniseringen sker för tidigt och av svaghet, ej som någonting naturligt.

Problembehandling och användandet av ekvationer.

Även användandet av ett visst lösningssätt kan inverka på problembehandlingen. På det område, som här behandlas (från folkskolans till drygt realskolans kurs) blir det egentligen fråga om två olika sätt: ekvationer eller icke ekvationer. Många problem, hörande till detta område, kunna ju lösas antingen med eller utan användande av ekvationer.

Med ekvationerna följer också ett livligare användande av formler. På hithörande område finnas exempelvis ränteformeln $\left(r = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}\right)$ och hastighetsformeln $(v = h \cdot t)$. Att s. k. formeluppgifter vid lösandet bli behandlade på ett karakteristiskt sätt, har redan förut avhandlats.

Men även andra problem, som inte kunna sägas vara formeluppgifter, s. k. allmänna problem, bli ej behandlade på samma sätt, om de lösas medelst ekvationer, som om de lösas på annat sätt. Detta torde tydligt framgå av det följande.

Försöken härvidlag voro så anordnade, att fpna 1—28, som ägde nödiga förutsättningar, löste de delgivna problemen medelst ekvationer. Fpnr ur en annan klass (a, b, c, etc.), som ej behärskade erforderliga delar av ekvationsläran, löste uppgifterna på annat sätt. För övrigt stodo dessa senare fpnr på ungefär samma kunskapsnivå som fpna 1—28. Samtliga fpnr avgåvo utsagor angående de behandlade problemen.

Ett av de förelagda problemen var följande: — Två kärl innehålla lika mycket vatten. Ur det ena avtappas 30 l. och ur det andra 90 l., varefter det ena innehåller dubbelt så mycket som det andra. Hur mycket innehöllo kärlen ursprungligen? —

Först en typiskt utsaga av fpna, som använde sig av ekvationer:

Fpn 21: »— — — ett lätt tal, men jag ritar väl i alla fall upp kärlen. (Så följde ritningar med uppdelning enligt exemplet.) Det frågas efter, hur mycket de bägge lika kärlen innehöllo ursprungligen. Kallar kärlets rymd för x. Avtappas 30 l., så återstå $x - 30$ l. I det andra återstå $x - 90$ l. Nu är det dubbelt så mycket i det första som i det andra. Alltså är $x - 30 = 2\ (x - 90)$ — — —».

Så ett par utsagor av dem, som inte använde sig av ekvationer:

Fpn b: »— — — Man vet ej, hur mycket det var i kärlen från början och inte heller efter avtappningen. Därför förefaller det svårt. Det avtappades 60 l. mer ur det andra än ur det första. Så innehåller detta dubbelt så mycket som det andra. Detta är allt, vad man kan få ut. Det ser svårt ut att få någon reda på det. Ritar väl upp kärlen, så får jag se, hur det tar sig ut då. (Här följde en motsvarande teckning.) Då avtappandet av 60 gör, att det blir bara hälften mot i första kärlet, så måste en sådan hälft vara just 60. Härav följer, att det första kärlet innehåller $2 \cdot 60 = 120$. Förut har avtappats 30. Alltså skulle kärlet från början innehålla 150 l. — — —».

Fpn g: »— — — Om jag ändå visste, hur mycket kärlen innehöllo efter tappningen! Men nu vet man ingenting. Det tappades 30 ur det ena och 90 ur det andra. Då måste kärlen åtminstone från början innehålla mer än 90 l. Men hur mycket? Det tappades 60 mer från det andra än från det ena. Då var det dubbelt så mycket i det ena. Kanske det blir $2 \cdot 60 = 120$ l. Är inte alls säker på att det är rätt. Känner nästan på mig, att det är orätt, men jag kan ej få det på annat sätt — — —».

Som synes, är tillvägagångssättet hos fpn 21 rätt olikt de bägge andras. Under det att de fpnr, vartill den förra hörde, i allmänhet funno problemet lätt, ha fpna i den andra gruppen tyckt, att det var svårt. Bara detta är ju en skillnad. Svårigheterna ha vållat, att de senare fpna ej kunnat steg för steg analysera problemet. De ha haft svårt att sluta sig till att det måste bli 60 l. kvar i det kärl, varur avtappats 90 l. Först genom uppritande av kärlen samt uppdelning av dem enligt

uppgifterna i exemplet har en del lyckats komma till rätta med problemet. Många av dem, som icke på så sätt åskådliggjort de dunkla punkterna, ha misslyckats.

De, som använt sig av ekvationer, ha härvidlag haft lättare. Sedan de definierat x (vilket ju har varit synnerligen lätt), ha de haft en fast utgångspunkt, något som flera av de andra fpna klagat över att de inte haft. Sen ha de bara haft att enligt texten till problemet sammanställa uppgifterna med utgångspunkten. Dessa detaljuppgifter stå i ett tämligen omedelbart förhållande till utgångspunkten eller x. De, som icke använt ekvationer däremot, ha haft att dras med längre tankebyggnader eller mindre lätt framtagbara slutsatser. Det är detta, som gjort, att deras räknearbete fått en annan karaktär, vilket framgår av utsagorna. Rättprocenten har också blivit betydligt lägre än för de förra. Likaså har den använda tiden blivit avsevärt längre.

Orsaken härtill har huvudsakligen varit, att fpna, som förut påpekats, haft svårt att få klart för sig, att det andra kärlet efter avtappningen innehöll 60 l. Tankekedjan dit är inte heller så kort. Den ser (som fpna nu tagit det) ut ungefär så här:

1) Ur kärlet 1 avtappades 30 l.;
2) » » 2 » 90 »;
3) 90 är 60 mer än 30:
4) Kärlet 1 innehåller 60 l. mer än kärlet 2;
5) Kärlet 1 innehåller också dubbelt så mycket som kärlet 2;
6) Dubbelt så mycket, som kärlet 2 innehåller, är lika med vad som finns i samma kärl och 60 l. därtill;
   eller: om man tar bort hälften ur kärlet 1 och lika mycket ur kärlet 2, så har man 60 l. kvar i kärlet 1;
   eller: Om man slår i 60 l. till i kärlet 2, så blir det dubbelt så mycket som förut;
7) Alltså innehåller kärlet 2 60 l.;
8) Ur samma kärl avtappades 90 l.;
9) Alltså rymmer det $60 + 90 = 150$ l.

Kalla vi, vad som fanns kvar i kärket 1, för a och resten i kärlet 2 för b, får samma tankekedja följande form:

$$1-3)\ 90 - 30 = 60;$$

$$4)\ a = b + 60;$$

$$5)\ a = 2b;$$

$$6)\ \begin{cases} 2b = b + 60; \\ 2b - b = 60; \end{cases}$$

$$7)\ b = 60;$$

$$8-9)\ 60 + 90 = 150.$$

Visserligen överhoppas en del leder, d. v. s. tankegången är i regel bitvis omedveten, men oaktat detta, och så enkelt problemet i och för sig än är, erbjuder tankekedjan bara genom sin längd stora svårigheter. Det har för fpna varit svårt att fasthålla de slutsatser, vartill de kommit. Punkt 4 ha alla fpnr fått fram, likaså punkt 5, som ju kan tagas direkt ur uppgiften. Men enbart framtagandet av slutsatsen 6 har vållat många stort bryderi. Och om fpna lyckats komma till att »dubbelt så mycket, som kärlet 2 innehåller, är lika med vad som finns i samma kärl och 60 l. därtill», så har det varit svårt att tyda detta. Flera fpnr ha stupat just på den saken. Formuleringen — om nu fpna kommit så långt — »om man slår i 60 l. till, så blir det dubbelt så mycket som förut», ha däremot fpna kunnat tyda.

Orsakerna till att en del fpnr misslyckats med problemet ha således varit, att slutsatser ej kunnat dragas, att premisser och förut dragna slutsatser ej kunnat fasthållas, att slutsatserna ej varit följdriktiga och formulerade på ett lättförståeligt sätt. Att detta i sin tur till stor del berott på att tankekedjan varit så lång, är självklart. En annan sak, som vållat besvär, synes ha varit, att en del fpnr ej kunnat se bort ifrån de avtappade mängderna, när de kommit så långt, att dessa uppgifter ej behövdes. En utsaga, som särskilt visar detta:

Fpn o: »— — — och vet, att det ena innehåller 60 l. mer än det andra. Så är det också dubbelt så mycket i det ena som i det andra. Men jag måste nog ha med de 30 l. också. Om jag har ett kärl och tar bort 30 l., så är det dub-

belt så mycket, som om jag toge bort 90 l. ur samma kärl. Och om jag tar bort 30 l. ur ett kärl, så är det 60 l. mer, än om jag toge bort 90 l. ur kärlet. Det här var svårt att hålla ihop. Får väl försöka igen (samma resonemang). Om jag tar bort, vad som finns kvar, då jag tar bort 90 ur kärlet från det dubbla, så är det 60 kvar. Då är det, som fanns kvar, då jag tog bort $90 = 60$ l. $90 + 60 = 150$ — — —».

Denna fpn har tydligen löst uppgiften enligt följande tankegång (x = vardera kärlets rymd):

$$x - 30 = 2(x - 90);$$

$$x - 30 = x - 90 + 60;$$

$$2(x - 90) = x - 90 + 60;$$

$$2(x - 90) - (x - 90) = 60;$$

$$x - 90 = 60;$$

$$x = 60 + 90.$$

Som vi se, har samma sätt från början använts som vid användandet av ekvationer. Men som fpn ej ägde kännedom om det vanliga lösningssättet därvidlag, har ingen förenkling av den första likheten skett, utan vederbörande har fått dragas med de »obearbetade» uttrycken ända fram mot slutet. Att detta varit synnerligen besvärligt, finner man, om man följer tankegången i utsagan. Det har ju varit mycket lätt att få upp den första likheten. Svårigheterna ha kommit sedan.

Härav kan man förstå, hur lätt analyseringsarbete de fpnr haft, som använt sig av ekvationer. Det svåraste har ju för dem varit just det första, att få upp ekvationen. Problembehandlingen har för dem blivit helt annorlunda beskaffad än för de andra. Nu bör ju påpekas, att åskådliggörande medelst teckningar betydligt underlättat analysen och de därpå byggda sammanställningarna. Men de räknare (som icke använt ekvationer), som inte betjänat sig av detta hjälpmedel och inte varit tillräckligt skarpa i analysen, ha ohjälpligt kommit fel.

Ett annat problem, som förelades fpna, lydde så: — Då man i en skolklass satte blott 5 ynglingar på varje bänk, blev ingen plats övrig för 4. Satte man däremot 6 på varje bänk, kommo på sista bänken endast 4. Huru många bänkar och lärjungar? —

En typisk utsaga från fpna, som använde ekvationer:

Fpn 14: »— — — och kallar bänkarnas antal för x. Då blir det i första fallet $5x + 4$. I andra fallet blir det $6x - 2$ lärjungar. Då får jag ekvationen $5x + 4 = 6x - 2$ — — —».

Så en utsaga från de andra fpna:

Fpn d: »— — — vet ej, hur jag ska göra med det här talet. I en klass kan det dock inte vara så många, en 20, 30, 40 stycken kanske. Om det var 4 bänkar, så blev det 24 lärjungar, om 5 lärjungar sattes på varje bänk. Med 6 på varje bänk blir det 22. Det var således inte riktigt. Var det 5 bänkar, så blir det 29 lärjungar i första fallet och 28 i det andra. Inte heller det stämmer. Försöker då med 6 bänkar. Då blir det efter det första 34 och efter det andra också 34. Alltså var det 6 bänkar och 34 lärjungar. Men kanske den här räkningen inte gillas, eftersom det liksom gissas — — —».

För dem, som vid problemets lösande använde ekvationer, var uppgiften ej svår. Det är relativt lätt att ur texten få fram ekvationen, och lösandet av denna erbjuder ju ej några som helst svårigheter. Analysen har också gått lätt.

Den andra gruppens fpnr ha haft det kinkigare. Dessa fpnr ha ej kunnat få fatt på någon lämplig utgångspunkt utan måst nöja sig med att sätta in siffror på försök. Försöken ha fortsatts, tills de träffat rätt, och eftersom exemplets natur gjort, att gränserna kunnat göras tämligen snäva, ha de också lyckats få rätt svar, även om man inte kan kalla det en egentling lösning av problemet. I varje fall ha även här tillvägagångssätten blivit väsentligt olika, beroende på om fpna vid lösandet använt ekvationer eller inte.

Ett annat förelagt problem lydde så: — Hur stor är sidan i en regelbunden 5-hörning, vars yta är 139,5 m^2 och apotem 6,2 dm.? —

En utsaga från den första gruppen:

Fpn 16: »— — — vet, att ytan av en regelbunden 5-

hörning är $\frac{5 \cdot s \cdot a}{2}$, där s är sidan och a apotemet. Då få vi, att $139{,}5 = \frac{5x6{,}2}{2} = 15{,}5x$; $x = \frac{139{,}5}{15{,}5}$ — — —».

Från den andra gruppen:

Fpn r: »— — — delar upp 5-hörningen i trianglar (här följde en uppritning av 5-hörningen, uppdelad i 5 trianglar och utsatt apotem). Sidan i 5-hörningen är bas i trianglarna. Men den frågas det efter. Jag vet, hur stor ytan är, och hur stor höjden är i triangeln. Hur ska jag då få reda på hur stor sidan är? Det blir värre. Om jag delar 139,5 med 5, så får jag reda på hur stor en triangel är. $\frac{139{,}5}{5} = 27{,}9$. Hur ska jag nu få tag i basen? Ytan av en triangel är ju lika med basen gånger höjden genom 2. Hade det varit en rektangel, så hade det bara varit att dividera ytan med höjden. Men nu är det en triangel. Ska basen då vara större eller mindre? Ytan är densamma. Då måste basen vara större. Men jag är inte riktigt säker. Får väl rita upp en rektangel och en triangel med ungefär lika stora ytor och höjder. (Här följer en ritning.) Jo, basen ska tydligen vara 2 gånger så stor — — —».

Av utsagorna framgår, att räknearbetet varit betydligt vidlyftigare för den senare gruppen än för den förra. Fpna i den förra gruppen ha endast haft att sätta in behövliga delar (det lätt definierbara x och sifferuppgifterna) i formeln. Den senare gruppens fpnr däremot ha så att säga måst gå igenom uppgiften från början. De ha visserligen löst sådana uppgifter förut men ej fått samla det generella i en formel, vilket ju ej gärna kunde ha ifrågakommit, då de ej kände till nödiga delar av ekvationsläran. Dessa fpnr ha för att kunna lösa problemet måst utföra allt det räknearbete, som representeras av formeln, d. v. s. deducerandet av densamma. Att problembehandlingen, och därmed utsagorna, därigenom fått en helt annan karaktär, bör ej förvåna. Flera av den senare gruppens fpnr ha också, som framgår av utsagorna, tvingats att åskådliggöra vissa partier av uppgiften.

Ehuru s. k. formelproblem behandlats förut, torde det kanske vara nödvändigt att i detta sammanhang medtaga ytter-

ligare ett. Följande hastighetsproblem delgavs: — Från två ställen, vilka äro belägna på 35 km. avstånd från varandra, gå två personer varandra samtidigt till mötes. Den ena använder 2 timmar och den andra 3 timmar på varje mil. Efter hur lång tid mötas de? —

En utsaga av fpnr, som använde ekvationer:

Fpn 27: »— — — Vägstycket var 35 km. I fortsättningen talas om mil; då är det bäst att göra detta till mil. Det blir 3,5 mil. Det är ju ett hastighetsproblem. Vägen är lika med hastigheten gånger tiden. Vad är då den förstes hastighet? Han använde 2 timmar på varje mil. På en timme går han då $\frac{1}{2}$ mil, som är hans hastighet. Den andras hastighet är $\frac{1}{3}$. Hur är det med tiden? De gå samtidigt och fortsätta, tills de mötas. De använda således lika lång tid. Det frågas efter tiden, den kallar jag för x. Den enas väg blir då $\frac{1}{2}x$ och den andras $\frac{1}{3}x$. Men hur ska jag nu få någon ekvation? Den enas väg är inte lika med den andras väg. Nej, det går inte. Men vägen var 3,5 mil. Den ena gick en bit, den andra resten av vägen. Då får jag, att $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 3{,}5$ — — —».

En utsaga från den andra gruppen:

Fpn k: »— — — är bäst, att jag ritar upp vägen.

Avståndet mellan A och B är 35 km. eller 3,5 mil. Den första gick från A till C och den andra från B till C. De gingo samtidigt och fortsatte, tills de möttes. De höllo således på lika länge. Deras vägar bli tillsammans 3,5 mil. Men hur länge höllo de på? Den ena använde 2 timmar på milen, den andra 3 timmar. När den ena gått i 2 timmar och den andra i 3 timmar, så hade de gått 2 mil tillsammans. När den ena gått i 4 timmar och den andra i 6 timmar, ha de gått 4 mil. Men det blir ju mer än hela vägen. När den ena gått i 3 timmar, hade han gått 1 $\frac{1}{2}$ mil. Då den andra gått i 4 timmar, hade han gått 1 $\frac{1}{3}$ mil. Nej, det här går inte! Då den ena gått i 3 timmar, hade han gått 1 $\frac{1}{2}$ mil. Då den andra gått i 3 timmar, hade han gått 1 mil. På 3 timmar ha de således gått 2 $\frac{1}{2}$ mil tillsammans. På 6 timmar gå de 5 mil. Det dröjde såle-

des ej 6 timmar för dem. Men hur ska jag få reda på precis? Får väl se efter, hur långt de gingo på 1 timme. På 6 timmar gingo de 5 mil. På 1 timma $\frac{5}{6}$ mil. Jo, nu har jag det! Jag ser efter, hur många gånger jag kan ta $\frac{5}{6}$ ur 3,5. Det blir $\frac{3{,}5 \cdot 6}{5}$ — — —».

Utsagorna äro varandra väsentligt olika. Den första fpn har haft mycket lättare arbete än den andra. Eftersom hastigheten ingår i den av den första fpn kända formeln, klargjordes denna sak lätt från början. Sen var det bara att plocka in nödiga uppgifter i formeln. Den andra fpn däremot, som inte kände till formeln och ej räknade med ekvationer, har, som synes, haft det rätt besvärligt med just detta parti av problemet. Att räknandet därigenom fått en sökande och trevande karaktär, är ej underligt. Kunskap i fråga om ekvationer och formler kunna således verka underlättande vid problemanalysen. De för lösningarna använda tiderna peka hän i samma riktning.

Dock finns det ju en del problem på hithörande område, som lösas lika lätt utan användande av ekvationer. Ibland kunna t. o. m. sådana lösningar synas vara mera eleganta. Att närmare ingå på värdet av den ena eller andra räknearten får emellertid anstå, åtminstone tills vidare.

Med ledning av det föregående kan man dock anse som säkert, att de fpnr, som icke använt sig av ekvationer, ofta haft svårare analyseringsarbete än de andra. Många gånger ha deras räknearbete fått en sökande och trevande karaktär. Problembehandlingen har med ett ord i väsentlig mån varit beroende av det använda lösningssättet.

Problembehandling och den räknandes ståndpunkt, inlärningssätt m. m.

Det bör utan vidare vara klart, att en tränad och mera försigkommen räknare ej förfar på alldeles samma sätt vid lösandet av ett problem som en i detta avseende på lägre ståndpunkt stående. Ett par exempel med utsagor, som följa, äro avsedda att belysa dessa förhållanden.

I dessa försök deltogo dels fpna 1—28, vilka vid denna tid undervisats av mig i två och en halv terminer, dels en annan klass, som endast en halv termin åtnjutit undervisning. Samma exempel delgåvos de båda gruppernas fpnr, vilka hade att avge utsagor på vanligt sätt.

En uppgift: — $7\frac{1}{2}$ dagar hade åtgått för 12 arbetare för att fullborda ett arbete; huru många arbetare skulle man använt för att få det färdigt på $4\frac{1}{2}$ dagar? —

En typisk utsaga från de mera tränade räknarna:

Fpn 26: »— — — 12 arbetare behövdes för att få det färdigt på 7,5 dagar. För att få det färdigt på 4,5 dagar behövdes $\frac{7{,}5 \cdot 12}{4{,}5}$ — — —».

Ett par utsagor ur den andra gruppen:

Fpn a: »— — — Det behövdes 12 arbetare för att få arbetet fullbordat på $7\frac{1}{2}$ dagar. $7\frac{1}{2} = \frac{1}{2}^5$. Det behövdes $\frac{1}{2}^5$ dagar för 12 arbetare. Hur många behövdes då för att få det färdigt på en $\frac{1}{2}$ dag? 15 gånger mera $= 12 \cdot 15$. Så många behövdes för att få det färdigt på $\frac{1}{2}$ dag. Huru många man behövdes då för att få det färdigt på en dag? Svar: 2 gånger

mindre $= \frac{12 \cdot 15}{2}$. Nu är $4\frac{1}{2}$ lika med $\frac{9}{2}$. Hur många man behövdes då för att få det färdigt på en halv dag? Därtill behövdes 2 gånger så många $= \frac{2 \cdot 12 \cdot 15}{2}$. Så många för att få arbetet färdigt på $\frac{1}{2}$ dag. Hur många för att få det färdigt på $\frac{9}{2}$ dagar? Svar: 9 gånger mindre antal $= \frac{2 \cdot 12 \cdot 15}{2 \cdot 9}$ — — —.»

Skillnaden beträffande dessa utsagor märkes ju lätt. I ena fallet har räknearbetet av allt att döma till stor del skett omedvetet, d. v. s. den räknande har varit inne på känd mark och på förhand vetat eller haft på känn, hur det skulle vara. I andra fallet har fpn synnerligen minutiöst gått igenom det hela. T. o. m. övergången från $\frac{1}{2}$ till 1 och så åter till $\frac{1}{2}$ har gjorts. Analysen och den därpå byggda sammanställningen har i detta fall varit synnerligen omständlig.

Nu skulle man ju kunna misstänka, att dessa olikheter möjligen kunnat bero på fpnas olika sätt att avge utsagor. Men då jag dels förut givit noggranna och likartade föreskrifter samt dels strax efter utsagorna förvissat mig om att utsagorna motsvarat problemets behandling, har ett sådant antagande föga skäl för sig. Den förra fpn behövde ej företa en så grundlig analys och ej heller medvetet ta alla små steg i uträkningen. Den senare, som var relativt otränad på området, hade däremot behov av att gå tillväga på så sätt.

En annan utsaga från den andra gruppen:

Fpn c: »— — — sätter jag 7 i stället för $7\frac{1}{2}$ och 4 i stället för $4\frac{1}{2}$. Då blir det lättare. För att göra det på 7 dagar behövs det 12 arbetare. Det behövs naturligtvis flera arbetare för att göra det färdigt på 1 dag och 7 gånger så många $= 7 \cdot 12$. För att få det färdigt på 4 dagar behövs det 4 gånger färre $= \frac{7 \cdot 12}{4}$. Nu sätter jag åter in $7\frac{1}{2}$ och $4\frac{1}{2}$. Då får jag $\frac{15 \cdot 12 \cdot 2}{2 \cdot 9}$ — — —».

Denna fpn har förenklat eller åskådliggjort problemet genom att sätta in hela tal i stället för de blandade. Härigenom

ha uppgiften och uträkningen blivit överskådligare. Även detta torde stå i direkt samband med den relativt lilla träning, fpn haft. Fpna ur den första gruppen ha ej haft behov av att så förenkla eller åskådliggjöra den lätta uppgiften.

Detta skulle utom på den större träningen och kunskaperna i ämnet också kunna bero på större begåvning, tycker man kanske. Det är sant, att olikheter beträffande begåvning (varom mera längre fram) gjort sig gällande på motsvarande sätt i fråga om problemlösning. Den mera begåvade har ej haft behov av att så grundligt analysera och åskådliggöra, att gå så minutiöst tillväga som den mindre begåvade. Vissa partier av räknearbetet synas ha skett tämligen omedvetet hos några av de bästa begåvningarna. Men beträffande de nu anförda fpna gäller inte detta, enär de till den andra gruppen hörande, varom jag efteråt förvissat mig, hade fullt ut så lätt för ämnet som fpn 26.

Det här förut behandlade problemet var ju synnerligen lätt. Förhållandena kunna bli helt annorlunda, om uppgiften är av svårare beskaffenhet, vilket framgår av vad som följer.

Följande problem delgavs fpna i de båda grupperna: — En kista med varor vägde 46,2 kg.; kistans vikt var $\frac{3}{17}$ av varans vikt. Hur mycket vägde varan? —

Fpn 16: »— — — Kistan vägde med varor 46,2 kg. Kistans vikt var $\frac{3}{17}$ av varans vikt, således ej av 46,2. Det här får jag rita upp.

A till C betecknar vikten på kista och vara tillsammans. A till B = varans vikt. B till C = kistans vikt. Nu är $B - C = \frac{3}{17}$ av $A - B$. Om vi då anta, att $A - B$ är en hel eller $\frac{17}{17}$ och $B - C$ $\frac{3}{17}$ av det hela, så blir hela $A - C = \frac{20}{17}$. Men $A - C$ är $46{,}2 = \frac{20}{17}$. Då är $\frac{1}{17}$ 20 gånger mindre $= \frac{4{,}62}{20}$. $\frac{17}{17}$ är 17 gånger mer $= \frac{46{,}2 \cdot 17}{20}$ — — —».

En utsaga från den andra gruppen:

Fpn m: »— — — ett tal, som jag nog ska kunna räkna ut. Hela kistan vägde 46,2 kg. Själva kistan vägde $\frac{3}{17}$ härav, d. v. s. $\frac{3 \cdot 46{,}2}{17}$. Tycker, att talet är lite konstigt, men det blir väl så ändå — — —.»

Efter vad som framgår av dessa utsagor — och de anförda äro rätt så betecknande för de resp. grupperna — har den kunnigaste förfarit mera grundligt beträffande analysen, och i synnerhet har denna fpn gått åskådligt tillväga. Varpå kan då detta bero? I föregående fall var det tvärtom. Tydligen är orsaken att finna i det förhållandet, att det här var fråga om att lösa ett svårare problem. De mera kunniga ha på grund härav tvingats att både analysera och åskådliggöra.

Fpna i andra gruppen däremot ha ej fattat innebörden av problemet och därför funnit detsamma lätt; på sin höjd ha de tyckt, att uppgiften var »konstig». Det har således ej varit av styrka utan av svaghet som dessa fpnr ej analyserat så grundligt och åskådliggjort behövliga delar. Därigenom ha de också kommit fel. I fråga om det lätta problemet ha de mera försigkomna ej behövt gå så grundligt tillväga. Här däremot ha de funnit detta vara nödigt.

Här angivna förhållanden synas i mångt och mycket även gälla mera begåvade och mindre begåvade räknare. De mera begåvade gå vid lättare uppgifter oftast ej så grundligt tillväga som de svagare. Men då så påfordras, arbeta de sig in i problemet genom grundligare behandling. Vid dessa undersökningar har för övrigt ej skillnaden i fråga om begåvning kunnat framträda så skarpt, enär fpna efter genomgåendet av matematikkursen visat sig synnerligen jämna. Det torde också vara så, att obegåvning beträffande ämnet ej förefinnes i så stor utsträckning, som man i allmänhet tror. Oriktigt studiesätt, luckor i det matematiska vetandet o. s. v. göra, att intresset slappas, ja, att t. o. m. olust uppstår. Resultatet blir naturligtvis då dåligt, och den räknande anses både av sig själv och andra som obegåvad. Gör man sig besvär med att fylla ut luckorna och leda räknarna in på rätt bog, skall man emellertid finna, att »obegåvningen» oftast försvinner.

Även trötthet och indisposition i allmänhet kan, som naturligt är, inverka på problemens behandling. Det må vara nog att påpeka, att problemen under sådana förhållanden te sig svårare än annars, och att räknearbetet får en mera primitiv karaktär. Fpna ha i sådana situationer använt sig av vägar och metoder, som de under normalt tillstånd för länge sedan övergivit. Ofta får arbetet och därmed utsagorna en irrande karaktär; fpna ha många gånger huggit till på måfå, använt sig av onödigt minutiös analysering o. s. v. Däremot ha sällan under dylika förhållanden fina lösningssätt kunna hittas.

Av utsagan å sid. 70 framgår, att fpna gått synnerligen minutiöst tillväga. Särskilt är att märka, att fpn gjort den onödiga övergången från $\frac{1}{2}$ till 1 och så åter till $\frac{1}{2}$. Orsaken härtill torde vara, att fpn vid undervisningen i barndomsskolan vant sig därvid. Härav framgår, att även inlärningssättet spelar en viss roll i fråga om problembehandlingen. Att matematikundervisningen som all annan undervisning på sina håll är behäftad med vissa egenheter, som ej tillräckligt underlätta utan t. o. m. försvåra arbetet för lärjungen, är säkert. Det ovan anförda var ju ej så farligt. Vissa skäl finnas måhända, som tala för just ett sådant tillvägagångssätt. Men man stöter ibland på förfaringssätt av mera tvivelaktigt värde.

Några stycken av de i dessa undersökningar deltagande fpna ha på grund av undervisningen i folkskolan behandlat vanlig division på ett egendomligt sätt. Särskilt ha egendomligheterna kommit till synes vid bråkräkning, vid såväl allmänt som decimalbråk. Som deras första utsagor och således också motsvarande räknearbete därigenom fått sin särskilda karaktär, torde hithörande förhållande böra granskas en smula.

Det är den ej alldeles obekanta utförliga innehålls- och delningsdivisionen som åsyftas. Folkskolans lärare ha vid vissa utbildningsanstalter grundligt fått gå igenom och tillämpa förfaringssättet — ofta dock, enligt deras egen förklaring, utan att fullt kunna inträngа i mysterierna —, och somliga ha naturligtvis sökt överföra det till egna skolor. I renodlad form — enligt anteckningar från en utbildningsanstalt, där tillvägagångssättet strängt tillämpades — skulle det te sig sålunda.

Ex. (Dividendenden större än divisorn. *Delnings*division):

— Ett tygstycke kostade 17,92 kr. Hur mycket kostade varje meter, då stycket var 3,2 meter långt? —

Lösning: 17,92 kr. : 3,2 = ? — 17,92 är 3-falden och 2 tiondelar eller 32 tiondelar av hur mycket? — 17,92 är 32 tiondelar av det sökta talet. — Hur stort är det tal, varav 17,92 är 1 tiondel? — 10 gånger så stort. — Så stort är det tal (nämligen 179,2), varav 17,92 är 1 tiondel; hur stort är då det tal, varav 17,92 är 32 tiondelar? — 32-delen därav. — Alltså 179,2 kr. : : 32 = 5,6 kr.

Ex. (Dividenden större än divisorn. *Innehålls*division): — Ett tygstycke kostade 17,92 kr. Hur många meter innehöll det, då varje meter kostade 5,6 kr.? —

Lösning: 17,92 kr. : 5,6 kr. = ? — 17,92 är hur stor mångfalld av 5,6? — Så stor mångfald (nämligen 17-falden och 92 hundradelar) är 17,92 av 1 hel; hur stor mångfald är det då av 1 tiondel? — 10 gånger så stor mångfald. — Så stor mångfald (nämligen 179,2) är 17,92 av 1 tiondel; hur stor mångfald är det då av 56 tiondelar? — 56-delen så stor mångfald. — Alltså 179,2 kr. : 56 kr. = 3,2.

Ex. (Dividenden mindre än divisorn. *Delnings*division): — En tygbit kostar 0,48 kr. Hur mycket kostar varje meter, då biten är 0,6 meter lång? —

Lösning: 0,48 kr. : 0,6 = ? — 0,48 är 6 tiondelar av vilket tal? — 0,48 är 6 tiondeler av det sökta talet. — Hur stort är det tal, varav 0,48 är 1 tiondel? — 10 gånger så stort. — Så stort är det tal (nämligen 4,8), varav 0,48 är 1 tiondel; hur stort är då det tal, varav 0,48 är 6 tiondelar? — 6-delen så stort. — Alltså 4,8 kr. : 6 = 0,8 kr.

Ex. (Dividenden mindre än divisorn. *Innehålls*division): — En tygbit kostar 0,48 kr. Hur lång är den, då varje meter kostar 0,8 kr.? —

Lösning: 0,48 kr. : 0,8 kr. = ? — 0,48 är hur stor del av 0,8? — 0,48 är så stor del av det sökta talet. — Så stor del (nämligen 0,48) är 0,48 av 1 hel. — Hur stor mångfald eller del är det då av 1 tiondel? — 10 gånger så stor mångfald eller del. (»Del» bör väl uteslutas?) = 4,8. — Så stor mångfald eller del är 0,48 av 1 tiondel; hur stor del är det då av 8 tiondelar? — 8-delen så stor del. — Alltså 4,8 kr. : 8 kr. = 0,6.

Så omständligt skall, enligt metoden, en enkel divisionsuppgift behandlas. Som förut påpekats, har det inte alltid lyckats folkskolans lärare själva att bli riktigt klara på tillvägagångssättet. Självklart är då, att folkskolans barn ej kunnat bli det. Det stora flertalet har väl förmodligen försökt men misslyckats. Det hela har för dem blivit en tungrodd apparat och vållat mycken tidsspillan. Det har visat sig, att samtliga de fpnr, som under sin folkskoletid arbetat enligt systemet, i ett eller annat avseende förfarit oriktigt. Vanligen har det hela blivit ett sammelsurium. Vidare har tiden för problemens lösande blivit alldeles för lång och felprocenten ändå oftast högre än för de andra.

Denna utförliga delnings- och innehållsdivision är ett typiskt exempel på vilka onödiga svårigheter lärjungarna få dras med. Många andra finnas. Egenheterna må emellertid vara av värdefull eller icke värdefull beskaffenhet, säkert är, att de ha sin inverkan på lärjungarnas problembehandling. Emellertid är det inte alltid sagt, att undervisarens sätt att ta saken strängt tillämpas. Den här förut omtalade delnings- och innehållsdivisionen kan det knappast för sin krånglighets skull. Det kan väl knappast falla en tränad räknare in att vid varje problem, där division förekommer, gå igenom hela detta system. Men, som också anförts, några fpnr ha dock i början försökt tillämpa det, vilket visar, att t. o. m. egenheter, som vålla stort besvär, kunna hänga kvar rätt länge.

Vad som här sagts om undervisarnas egenheter gäller också i stort sett om läroböckernas. Det är ju känt, att den ena läroboksförfattaren inte formulerar en och samma matematiska sats på samma sätt som en annan. Satserna komma så att användas av räknare vid problemlösning och därigenom komma tankarna att åtminstone till sin form vara olika. Som i fråga om problemen, vilkas formulering krävt sin särskilda behandling här förut, bör man kunna fordra, att satserna skola formuleras på ett klart och tydligt samt lättförståeligt språk. Vi skola se, hur det är ställt i detta avseende.

I en äldre lärobok (Elementarkurs i algebra, A. Th. Bergius) återfinnes följande sats: — *Summan av två storheter,* jakade eller nekade, är en tredje storhet som, om den tillägges till ett givet

tal, i händelse den är jakad, och om den frånd rages, i den händelse den är nekad, frambringar samma storhet som de båda andra storheterna, efter varandra på samma sätt använda. —

Denna sats torde vara onödigt tillkrånglad. Ett »givet tal» indras, vilket i och för sig gör det hela tyngre. Vidare är det inte alldeles så lätt att fundera ut, vad som menas med »efter varandra på samma sätt använda».

Betydligt klarare är samma författare i fråga om en annan likartad sats: — *Skillnaden* mellan två givna storheter är en tredje storhet, som, adderad till den senare av de givna storheterna, återger den förra. —

Motsvarande sats är hos en annan författare (Alfr. Berg, Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor) formulerad på följande sätt: — Subtraktion är det räknesätt, genom vilket man, då summan av två och det ena av dessa två tal äro givna, finner det andra talet. —

Definitionen å subtraktion lyder i en tredje lärobok (Möller, Larsson och Lundahl, Lärobok etc.) sålunda: — Det räknesätt, som användes för att finna den ena addenden, då summan och den andra äro givna, kallas subtraktion. —

De bägge sista satserna ändrades en smula och delgåvos fpna. Den första av den (ur Alfr Berg, Räknelära etc.) fick följande formulering: — Vad kallas det räknesätt, genom vilket man, då summan av två och det ena av dessa två tal äro givna, finner det andra talet? —

Den senare formulerades så: — Vad kallas det räknesätt, som användes för att finna den ena addenden, då summan och den andra addenden äro givna? —

Fpna uppdelades i två likvärdiga grupper, så noggrant detta kunde ske (satserna förelades i början av kusen), varefter den första formuleringen delgavs grupp 1, den andra grupp 2. Fpna hade endast att ange räknesättet samt den tid, som användes härtill. Följande tabell anger resultatet.

Tabell 10.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätta svar i %
Grupp 1	3,8	85,7
Grupp 2	2,1	100

Härav framgår, att den första formuleringen är svårare att komma tillrätta med än den andra. Den använda tiden är nästan dubbelt så lång som den andra gruppens; dessutom ha två fpnr menat, att det var addition, som åsyftades.

Vad kan det då vara, som gör, att den första förefallit svårare? En orsak torde vara, att den är mera abstrakt än den andra. Uttrycket »summan av två och det ena av dessa två tal» är abstraktare än »summan och den ena addenden». Vidare är formuleringen för övrigt i det sista av dessa uttryck mera smidig och lättförståelig än i det första. Härav förklaras också felprocenten i fråga om grupp 1.

»Allmänna definitionen» å multiplikation har hos en författare (Lars Phragmén, Aritmetik för de allmänna läroverken) följande lydelse: — Multiplikation är det räknesätt, medelst vilket man bildar ett tal av ett givet tal efter samma lag, enligt vilken ett annat givet tal bildas av enheten. —

Motsvarande definition beträffande decimalbråk (samma förf.) lyder: — Att multiplicera ett tal med ett decimalbråk såsom multiplikator är att taga den mångfald, som multiplikatorn angiver av den decimaldel av multiplikanden, som angives genom decimalernas antal i multiplikatorn. —

I fråga om allmänna bråk heter det: — Att multiplicera ett tal med ett bråk till multiplikator är att taga den mångfald, som multiplikatorns täljare angiver, av den del av multiplikanden, som angives av multiplikatorns nämnare. —

Man måste erkänna, att samtliga definitioner äro åtskilligt tillkrånglade. Men många anse ju, att det först under sådana förhållanden blir fullt »vetenskapligt».

Vi skola se, hur en annan lärobok (Lärobok etc., Möller, Larsson och Lundahl) tar det: — Det räknesätt man använder,

då man skall taga ett givet tal ett visst antal gånger, kallas multiplikation. —

Att denna formulering är klar och lättfattlig jämförd med den förut anförda »allmänna definitionen», inses ju lätt. Emellertid anställdes ett jämförande försök beträffande de bägge formuleringarna för att få en mätare i fråga om svårighetsgraden.

Satserna omändrades på följande sätt: — Vilket är det räknesätt, medelst vilket man bildar ett tal av ett givet tal efter samma lag, enligt vilken ett annat givet tal bildas av enheten? — Denna delgavs i grupp 1.

Grupp 2 erhöll den senare lärobokens formulering, så omändrad: — Vilket är det räknesätt, man använder, då man skall taga ett givet tal ett visst antal gånger? —

Resultatet av försöket blev, som följer:

Tabell 11.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätta svar i %
Grupp 1	12,2	50
Grupp 2	0,6	100

Den förra formuleringen krävde 20 gånger så lång tid som den senare. Och under det att den förra har en rättprocent av 50, har den senare alla svar rätt. Jämnt hälften ha svarat fel eller, rättare sagt, på annat sätt, än den anförda läroboken vill ha det. Dessa fpnr ha kommit till addition i stället för multiplikation, vilket för övrigt är rätt förklarligt. Ett tal kan också tänkas bli bildat genom ökning av enheten. Då det således varit oklart för fpna, hur ett »givet tal bildas av enheten», så har ju uttrycket »samma lag» också blivit oklart, och angivandet av det åsyftade räknesättet har mera blivit en gissning eller ett val mellan multiplikation och addition. Vidare är ju formuleringen för övrigt med anhopningen av relativsatser synnerligen svår att analysera.

Beträffande bråks liknämniggörande finnas i de olika läro-

böckerna en hel del regler eller satser, oftast inkrånglade och svårförstådda. Det skulle bli för långt att här dra fram samtliga, men det bör kanske påpekas, att även de nyaste läroböckerna i räkning, som dock härvidlag i allmänhet synas vara bättre än de äldre, äro belastade med mer eller mindre svårförståeliga uttryck. I en av dem (Lärobok i räkning för folkskolan, II, A_4 av E. Ehlin, tryckår 10) återfinnes följande: — Bråk bliva liknämniga, om de förlängas med de faktorer, som ingå i nämnaren hos jämn del till dem men saknas i deras egen nämnare. —

Angående denna sats anställdes ett försök med fpna. De fingo i uppgift att under högst 15 minuter arbeta sig igenom satsen och sedan med andra ord förklara de olika partierna. Det visade sig, att ingen enda kunnat reda ut, vad som menades med »hos en jämn del till dem».

Några satser angående digniteter må anföras: — Produkten av två digniteter av samma tal är lika med den dignitet av talet, vars exponent är summan av digniteternas exponenter (H. Nyman, Ekvationslära för realskolan, tryckår 16).

Multiplikation mellan digniteter *med samma bas* verkställes på så sätt, att faktorernas exponenter adderas, under det att den gemensamma basen blir oförändrad. (Hermods korrespondensinstitut). —

Det är givet, att den senare formuleringen är lättförståeligare. Då lärjungarna undervisas pr korrespondens, är det också nödvändigt att med all makt sträva därefter, om undervisningen skall ge något resultat. Det duger naturligtvis inte att sända eleverna onjutbara satser. Men även vanliga läroböcker borde framställa de matematiska sanningarna på ett lättförståeligt språk.

Ytterligare några satser angående digniteter: — Om en dignitet av en storhet divideras med en annan dignitet av samma storhet, så blir kvoten den dignitet av storheten, vilkens exponent är skillnaden emellan dividendens och divisorns exponenter (Algebra, A. Th. Bergius).

Kvoten av två digniteter av samma tal är lika med den dignitet av talet, vars exponent är skillnaden mellan digniteternas exponenter (H. Nyman, Ekvationslära etc.).

Division mellan digniteter med samma bas verkställes på så sätt, att exponenterna subtraheras, under det att basen blir oförändrad. (Hermods korrespondensinstitut.) —

Satserna gälla, som synes, samma sak. För att utröna svårighets- eller lätthetsgraden i fråga om de tre formuleringarna anställdes ett särskilt försök. Fpna, som förut ej ägde någon som helst kunskap på hithörande område, erhöllo under några minuter exempel på vad som menas med digniteter, exponenter och baser. Sedan detta var klart, indelades fpna i tre likvärdiga grupper. Grupp 1 erhöll formuleringen 1, grupp 2 formuleringen 2 och grupp 3 formuleringen 3. Samtidigt erhöllo fpna ett algebraiskt uttryck $\left(\frac{a^5}{a^3}\right)$ och uppmanades att förenkla uttrycket i enlighet med den delgivna satsen. Längsta tillåtna tiden var 15 min. Följande resultat erhölls:

Tabell 12.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätta svar i %
Grupp 1	14,0	44,4
Grupp 2	11,6	55,5
Grupp 3	8,2	88,8

Som var att förutse, lyckades grupp 3 bäst. I allmänhet löstes uppgiften riktigt av dem, som nu löste den. Orsaken till att procentsiffrorna för rätta svar äro så låga för de båda första grupperna beror därpå, att så många ej alls hunno förenkla uttrycket. De krångliga formuleringarna vållade så mycket besvär, att fpna ej under den anslagna tiden hunno tränga in i satsens mening. Den sista formuleringen däremot är mera lätthanterlig. Dessutom framhåller denna, hur man skall handla för att nå målet.

Den lättare formuleringen återfinnes även här i ett arbete från ett korrespondensinstitut. Därmed är det inte sagt, att dylika läroböcker alltid hålla måttet i berörda avseende. Men för att undervisningen pr korrespondens över huvud taget skall

bära någon frukt, tvingas vederbörande allt mer och mer att förenkla de matematiska satsernas formulering. Beträffande de vanliga läroböckerna får förenklingen göras av läraren. Man kan tryggt påstå, att den undervisande icke är en god lärare, om han inte har förmåga härtill. Men det är inte alltid, som läraren kan ersätta, vad som brister hos läroboken. I varje fall kunde och borde läroböckerna (det är att märka, att det är fråga om läroböcker för barn- och ungdomsskolor) lägga bort en hel del krångligheter och i stället använda ett lättförståeligt språk.

Många andra mer eller mindre svårbegripliga satser ur våra läroböcker i räkning skulle kunna framdragas, men det anförda torde vara tillräckligt som bevis för att lärjungarna vid våra skolor ofta få dragas med en mängd onödiga svårigheter. Att räknearbetet får sin karaktär allt efter de inlärda och använda satserna, är ju naturligt. Utsagorna ha givit tydliga bevis härför. Emellertid torde det vara så — åtminstone beträffande i dessa undersökningar deltagande fpnr —, att de räknande, så så snart de fullt behärska behövliga delar av matematiken och ej särskilt tvingas att använda viss formulering för sina tankar, kasta bort alla språkliga egendomligheter och låta tänkandet få en enkel och okonstlad form.

Som nämnts, gällde huvudundersökningarna de individuella olikheterna. Härvidlag har det naturligtvis varit nödvändigt att få de yttre betingelserna så lika som möjligt. Vilka av de här behandlade yttre faktorerna kan man då se bort ifrån?

Enär precis *samma* problem delgåvos fpna (se sid. 23 o. ff.) borde ju inte problemens formulering och natur kunna snedvrida resultaten. Om inverkan härvidlag förefanns, borde ju denna göra sig gällande hos såväl den ena som den andra.

Fpna kunde ledigt röra sig med ekvationer med en obekant redan vid huvudundersökningens början. Innan denna del av ämnet inhämtats, hade behövliga delar av kursen för en god folkskola genomgåtts. Fpna borde därför ha haft något så när lika förutsättningar i fråga om hithörande förhållanden.

En del mera egenartade förfaringssätt, som fpna fått med sig från de resp. folkskolorna, ha naturligtvis då och då kom-

mit till synes i utsagorna Men redan på tidigt stadium försvann det mesta härav.

Genom föreläggandet av s. k. allmänna problem (betydelsen av ett sådant tillvägagångssätt härvidlag har förut framhållits) ha fpnas individuella olikheter haft större möjligheter att komma till synes. Men ehuru jag således försökt att få de yttre betingelserna så lika som möjligt, är det ju klart, att fpna ändå ej kunnat bli fullkomligt likställda i berörda avseende.

Individuella olikheter.

A. Olika grad av åskådliggörande.

Efter att ha påvisat den inverkan, som problembehandlingen röner av de här förut nämnda faktorerna, och därmed också angivit de viktigaste felkällorna, och hur man i görligaste mån skall kunna undvika dem, övergå vi att redogöra för huvudundersökningarna, som röra sig om de individuella olikheterna. Undersökningsmaterialet har härvidlag huvudsakligen varit fpnas behandling av de å sid. 23 o. ff. anförda uppgifterna.

Av utsagorna har framgått, att de olika fpna vid lösandet av uppgifterna (ex. 3, som ju är ett rent sifferexempel, kan här undantas) ingalunda lagt i dagen lika stark strävan att göra de i uppgifterna förekommande sakförhållandena åskådliga. Det må nu vara åskådlighet i mera egentlig mening, att genom ritningar och dylikt framställa ett och annat i problemet, eller åskådlighet i föreställningens och tankens värld utan yttre hjälpmedel.

Så t. ex. ha vi i 24_6[1] en utsaga, som visar, att dess nedskrivare förfarit på ett tämligen åskådligt sätt. De bägge ytorna har uppritats ordentligt med rätt så riktiga proportioner. Hit kan ock räknas reflexionerna med anledning av det höga priset. (Ex. hade avsiktligt ändrats, för att jag skulle få se, om denna orimlighet uppmärksammades.) Vidare har fpn tänkt sig tillbaka, ånyo läst igenom uppgiften och letat reda på att där står angivet, att förgyllningen kostar 1 kr. pr cm?

Hos andra däremot har spårats en viss obenägenhet att framställa det i problemen omordade i åskådligare form. Så

[1] Fpn 24, ex. 6.

fpn 15 i utsagan angående ex. 8. Ehuru detta exempel speciellt inbjuder till att med linjer eller (som somliga ha gjort) med böcker och linjaler, som få löpa förbi varandra, åskådliggöra de ej alldeles så lätt funna vägarna för de båda tågen, har ingenting av sådant utförts.

Emellertid är det ofta svårt att få klart för sig, om fpn förfarit på ett åskådligt sätt eller inte. Det är ju tydligt, att utsagorna, även om fpna på det noggrannaste försökte nedteckna allt, som de upplevat eller företagit sig under problemlösandet, ej hos alla återge alla små skiftningar i tankegången. En del tycks för övrigt ske halv-, ja, t. o. m. omedvetet.

Sen är det också skillnad på åskådlighet. Det är åskådligheten ifråga om eller åskådliggörandet av sådant i problemen, som underlättar lösandet av desamma, vi skola försöka ta fasta på. Dit hör tydligen sådant, som påpekats här förut. Däremot torde det vara tvivel underkastat, om sådana saker som »Inte underligt, att han snart blev av med dem» (27_2) eller »Det var inte alls lätt att vara spannmålshandlare, men antagligen hade han bättre räknehuvud än jag» (14_4) höra hemma på detta område. Fpn lever sig nog in i uppgiften på visst sätt, men om detta underlättar lösandet av densamma, är en annan sak.

Vi skola anföra delar ur några utsagor, som tyda på ett åskådligt förfaringssätt.

6_2: » — — — Sedan jag räknat ut uppgiften, prickade jag ut kulorna så här» (så följer punktgrupper, föreställande antalet kulor hos de båda spelande vid de olika tillfällena).

8_4: »— — — För att bättre kunna få klart för mig kom jag att tänka på att jag skulle rita upp ett par lika långa streck och dela det ena i 12 och det andra i 13 lika delar — — —».

17_6: »— — — Ritar för säkerhets skull upp ytorna och jämför storleken. Bottenytan måste bli mindre än manteln».

18_7: »— — — 250 enkronor måste således vara tyngre än 1,5 kg., eftersom silvret bara utgör 80 %. Är det så orent silver i våra kronor? — — — En tvåkrona väger visst ungefär 15 gr. — — —».

21_8: »— — — Nu tar jag böckerna och för dem förbi

varandra och söker fundera ut, hur lång väg vardera tåget går — — —».

24_8: »— — — det var krångligt, men nu ritar jag upp tåglängderna såhär (uppritades med linjer) — — —».

23_{10}: »— — — Men kan då rågen vara tyngre än vetet? Jag har trott, att det var tvärtom. Skulle 12 tunnor råg vara lika tungt som 16 tunnor vete? Bäst att se genom exemplet än en gång — — —».

Så te sig utsagopartierna från somliga fpnr. Hos andra däremot finner man inte ett spår av sådant. Nu är att märka, att en del uppgifter särskilt inbjuda till att åskådliggöra sakförhållanden, som finnas angivna i desamma, andra däremot inte.

Sedan jag i utsagorna funnit, att olika grad av åskådlighet gjort sig gällande, förelades fpna ytterligare några problem. I dessa gavs gott tillfälle att åskådliggöra vissa uppgifter. Ett exempel lydde: — En påle stod med $^1/_8$ av sin längd i grunden, med $^1/_4$ i vattnet och 3 meter ovan vattnet. Hur lång var pålen? —

Några fragment ur en del utsagor angående detta problem:

Fpn 17: »— — — ritar jag opp, så får jag se, hur det ställer sig (ett streck med avskärningar, utmärkande uppgifterna i problemet uppritades) — — —».

Fpn 20: »— — — tänker jag mig pålen delad i tre delar; den översta delen är 3 m. — — —».

Fpn 24: »— — — detta föreställer pålen (ett streck). Den nedersta delen är längre än den mellersta — — —».

Ett annat räkneexempel, som i detta syfte förelades fpna, lydde sålunda: — I en rektangel var var och en av de längre sidorna 6 dm. längre än var och en av de kortare. Rektangelns omkrets var 7 m. 4 dm. Hur stor var ytan? —

Här nedan utdrag ur ett par utsagor:

Fpn 2: »— — — jag måste rita upp rektangeln. (Rektangeln var uppritad med utsatta beteckningar.) Jag kallar kortsidorna för x dm., då äro långsidorna $x+6$ dm. Alltså är

omkretsen $4x+12$ dm. Men omkretsen var också 74 dm. Således får jag likheten $4x+12=74$ — — —».

Fpn 7: »— — — kallar långsidan för x. Då är kortsidan $=x-6$. Hela omkretsen blir då $4x-6$. Så ha vi omkretsen $=74$ dm. $4x-6=74$ — — —». (Ingen ritning och förmodligen inte heller åskådligt föreställande. Resultatet blir därefter.)

Längre fram, då räknekunnigheten blivit större, gavs följande problem, varvid avsågs att få fram ett annat slags åskådliggörande. — En person sade till en annan: »Jag är dubbelt så gammal, som du var, då jag var så gammal, som du är nu; och då du blir så gammal, som jag är nu, skola våra år tillsamman utgöra 63.» Hur gamla voro de båda personerna? (Givet i mogenhetsexamen.) —

Denna uppgift, som är rätt så inkrånglad och genom sin formulering (»som du var, då jag var» t. ex.) tämligen svår att komma tillrätta med, vållade åtskilligt huvudbry. De, som togo det åskådligt, lyckades dock i regel; de andra misslyckades i allmänhet. Vilket slags åskådliggörande användes då? Jo, de bägge personerna åsattes till vidare en viss ålder (exempelvis 23 och 18 år resp.). Sedan handskades fpna lättare med uppgifterna. Resonemanget var ungefär följande. Anta, att den äldsta är 23 år, den yngsta 18 år? Hur länge sedan var det, den äldsta var lika gammal, som den yngsta är nu? (»då jag var så gammal, som du är nu») 23—18. Nu känner jag icke personernas åldrar, men jag kallar dem för x och y resp. Således x motsvarar 23 och y motsvarar 18. Alltså för $x-y$ år sedan var den äldsta lika gammal, som den yngsta var nu. Men hur gammal var den yngsta då? (»som du var»). För $23-18=5$ år sedan, om siffrorna användas, d. v. s. skillnaden mellan deras nuvarande åldrar. Således skall 18 minskas med 5, och motsvarande y minskas med motsvarande skillnad, och $y-(x-y)$ erhålles. Nu är de äldsta dubbelt så gammal som detta, d. v. s. $x=2\,[y-(x-y)]$, och en ekvation är färdig.

Andra ekvationen är ju lättare att få upp, men även ifråga om den ha fpna haft god hjälp av att använda bestämda tal för åskådliggörande av de förhållanden, som anges i uppgiften.

Av utsagorna samt de skriftliga proven i räkning att döma ha 11 fpnr avgjort förfarit åskådligt, 9 lika avgjort undvikit ett sådant förfaringssätt, och de övriga 8 ha i fråga om denna sak ibland gått tillväga så, ibland så. Man skulle beträffande dessa fpnr således kunna tala om en åskådlig typ, en ej åskådlig samt en medeltyp.

Nedanstående tabell (åskådligt förfaringssätt = å, ej åskådligt = e, mellanställning = m_1) ger en översikt över de olika fpnas tillvägagångssätt. Samtidigt anföras fpnas räkneresultat i % ur en föregående tabell.

Tabell 13.

Fpn	Förfaringssätt	Antal rätt räknade ex. i %	Avvikelse fr. medelproc. (69)	Fpn	Förfaringssätt	Antal rätt räknade ex. i %	Avvikelse fr. medelproc. (69)
1	e	70	+ 1	15	m_1	60	− 9
2	å	80	+11	16	m_1	50	−19
3	e	40	−29	17	å	80	+11
4	e	56	−13	18	å	90	+21
5	e	100	+31	19	å	90	+21
6	å	80	+11	20	å	70	+ 1
7	e	40	−29	21	å	80	+11
8	å	90	+21	22	e	50	−19
9	e	40	−29	23	å	88	+19
10	m_1	60	− 9	24	å	100	+31
11	m_1	60	− 9	25	e	60	− 9
12	m_1	60	− 9	26	m_1	90	+21
13	å	80	+11	27	m_1	56	−13
14	e	50	−19	28	m_1	70	+ 1

Man märker, att den åskådliga typen i regel återfinnes bland de bästa räknarna. Dock finnas undantag. Så tillhör en av de allra bästa räknarna den ej åskådliga typen (fpn 5). Detta kan emellertid bero på att fpn ej *behövde* förfara åskådligt — åtminstone medvetet. Lösningssättet har kanske stått klart ändå, utan att — så att säga — sådana hjälpmedel behövde anlitas.

Närmare utfört ter sig förhållandet sålunda:

Tabell 14.

Medeltal rätt räknade ex. i %		Avvikelser fr. medelprocenten (69)
Fpnr tillhörande å:	84	+15
» » e:	54	−15
» » m_1:	64	− 5

De bästa räknarna återfinnas således, som sagt, i gruppen å, de sämsta i grupperna e, under det att de till gruppen m_1 hörande även i detta avseende intaga en mellanställning.

Man skulle då kanske kunna antaga, att ett åskådligt tillvägagångssätt vid lösandet av problem skulle verka underlättande. Det skulle måhända gå bättre att tränga in i de sakförhållanden, som äro angivna i problemet, om man på ett eller annat sätt åskådliggör dessa förhållanden. Det torde vara säkert, att ett åskådligt tillvägagångssätt medför bättre räkneresultat. Men det kan många gånger kanske också vara så, att det är de bästa räknarna, som använda sig av dessa hjälpmedel, därför att de äro mäktiga därtill. Hur skall en svag räknare kunna åskådliggöra ett sakförhållande, som han inte fullt fattar?

Det kan också förhålla sig så, att räknaren så fullt behärskar lösningen redan i början — han vet redan vid första genomläsandet av problemet, hur detta skall tagas —, att det därför inte behövs något särskilt detaljerat åskådliggörande. Problemet kan vara för lätt för att det skall bli något verkligt ansträngande arbete av. Av tabellen å sid. 26 synes, att fpna i regel rett sig allt bättre med uppgifterna i tämligen jämn följd från början till slutet. Det är också att märka, att utsagorna blivit allt mera ordfattiga i fråga om de sista uppgifterna. Fpna hade förvärvat sig mera rutin, och även om exemplen i fråga om svårighetsgrad stegrats rätt betydligt, ha räkneresultaten blivit bättre, allt eftersom undersökningarna fortskridit. Genom vana och övning ha fpna allt mer lärt sig

att koncentrera sig på det väsentliga; en del bisaker, som kanske ha varit lätta att åskådliggöra, ha inte intresserat längre. Detta kan således vara anledning till att åskådliggörandet hos en del fpnr i viss mån inte blivit så detaljerat, som fallet varit från början.

Emellertid framgår det tydligt, att gott räkneresultat och åskådligt förfarande i regel höra i hop. Att man vid räkneundervisningen ej bör underlåta att taga detta sakförhållande med i beräkningen, är självklart.

För att ytterligare belysa detta förhållande ha fpna uppdelats i två grupper på så sätt, att de bägge grupperna blivit så nära jämnstarka och i fråga om åskådliggörande så likartade som möjligt.

Såväl tiderna för lösandet som räkneresultatet blevo vanligtvis mycket bättre för den grupp, som delgavs åskådliggjorda problem. Ett typiskt resultat av ett sådant försök, vari 26 av de 28 fpna deltogo, må här anföras.

Det angivna problemet lydde: — En gosse gjorde sig ett bleckmått på följande sätt. Han tog ett stycke bleckplåt i form av en rektangel, 24 cm. lång och 15 cm. bred, delade den genom linjer, parallella med plåtens kortsidor i 3 lika stora delar (här var för ena gruppen uppritad en rektangel, delad på sätt, som exemplet angiver), böjde tillsamman de båda yttre och hoplödde deras kanter. Sedan han i ena ändan av detta öppna rör fastsatt en botten (samma grupp hade här bottnen uppritad), hade han sitt mått färdigt. Hur mycket rymde det? — (Samtliga fpnr hade kvadratrotstabeller.)

Följande tabell anger resultatet. (Den grupp, som delgavs teckningar, kallas grupp 1, den andra grupp 2.)

Tabell 15.

	Medeltal använd tid i min.	Antal rätt räknade ex. i %
Grupp 1	11,2	84,6
Grupp 2	16,4	76,9

Redan detta lilla åskådliggörande verkade tydligen underlättande. Grupp 2 behövde i medeltal ungefär en halv gång till så lång tid som grupp 1. Felprocenten blev också betydligt större för grupp 2.

En annan uppgift behandlades på likartat sätt. Problemet hade följande lydelse: — En åker i form av en rektangel är 260 m. lång och dess yta 182 ar. Hur mycket minskas den, om man runt omkring från dess yttersida inåt gräver ett dike, som är 1,3 m. brett? (Givet i realskoleexemen v. t. 1911.) —

Grupp 1 erhöll problemet, sådant det var, grupp 2 dessutom åkern och diket uppritade. Resultatet framgår av följande:

Tabell 16.

	Medeltal använd tid i min.	Antal rätt räknade ex. i %
Grupp 1	8,5	76,9
Grupp 2	8,1	100

Visserligen är skillnaden i tid här obetydlig, men rättprocenten är mycket lägre för den grupp, som ej fick uppgiften åskådliggjord. Samtliga felräknare ha begått fel i fråga om hörnstyckena, vilket knappast kan göras, om åkern och diket uppritas.

En tredje uppgift lydde: — Ett järnvägståg behöver 10 sek. för att passera förbi en telegrafstolpe och 38 sek. för att gå igenom en 420 m. lång tunnel. (Tiden räknas från det ögonblick, då lokomotivet går in i tunneln och till det ögonblick, då sista vagnen lämnar densamma.) Hur långt är tåget och hur stor dess hastighet? (Givet i realskoleexamen v. t. 1915.) —

Vid försök härmed delades fpna i tre likvärdiga grupper. Grupp 1 erhöll problemet med utesluten parentes, grupp 2 förestående formulering och grupp 3 dessutom tågets läge i för-

hållande till telegrafstolpen och tunneln före och efter passerandet uppritat.

Följande resultat erhölls:

Tabell 17.

	Medeltal använd tid i min.	Antal rätt räknade ex. i %
Grupp 1	18,2	55,6
Grupp 2	12,5	88,9
Grupp 3	10,3	88,9

Ju åskådligare problemet var framställt, ju bättre har resultatet blivit. Den förklarande parentesen, som ströks ur ena formuleringen, har tydligen gjort stor nytta. Dock måste ju medges, att inte bara åskådligheten blir mindre utan också, att själva meningen blir oklar, om parentesen uteslutes. Ett par fpnr ha också kommit fel just på grund av att de givit en annan tydning åt »att gå igenom en 420 m. lång tunnel».

Med den behandlade uppgiften äro vi inne på ett annat slags åskådliggörande. Ett problem kan också åskådliggöras med ord. Ytterligare ett exempel, som belyser detta, må anföras. Följande två formuleringar angående ett och samma problem (givet i mogenhetsexamen, latinlinjen, v. t. 1897) delgavs de i två grupper uppdelade fpna.

Grupp 1 erhöll denna formulering: — På en ringformig skridskobana löpa två personer. Banans längd är 380 m. Då de löpa åt samma håll, råkas de var 76:e sek., men då de löpa i motsatt led, var 20:e sek. Hur hastigt åker vardera? —

Den andra formuleringen, som delgavs grupp 2, lydde: — På en ringformig skridskobana löpa två personer. Banans längd är 380 m. Då de löpa åt samma håll, råkas de var 76:e sek. (Hur många varv mer har den snabbare åkaren då åkt än den andra?), men då de löpa i motsatt led, var 20:e sek. (Hur många varv ha de båda löparna då åkt tillsammans?). Hur hastigt åker vardera? —

Följande resultat erhölls:

Tabell 18.

	Medeltal använd tid i min.	Antal rätt räknade ex. i %
Grupp 1	17,1	76,9
Grupp 2	12,2	92,3

Som synes, ha parenteserna haft sin stora inverkan. Nu kan man ju mena, att parenteserna innehålla just en del av lösningen. Det må så vara, men säkert är, att de räknande ytterst lätt kommit därhän, om de tänkt sig de åkande i ena och andra situationen, d. v. s. åskådliggjort problemet.

Det har varit rätt intressant att iakttaga, hur fpna med hänsyn till sin läggning beträffande åskådligt förfaringssätt reagerat vid delgivandet av de mer eller mindre åskådliggjorda uppgifterna. Som vi sett, har åskådliggörandet i stort sett verkat underlättande: de räknande ha fått bättre medeltal både i fråga om tid och resultat. Men denna förbättring har ingalunda varit jämnt fördelad på de olika grupperna å, m_1 och e. Avgjort fördelaktigt, ehuru ej i så hög grad, synes åskådliggörandet ha varit för de fpnr, som betecknats med å. Största nytta tycks m_1-gruppen ha haft, under det att de fpnr, som betecknats med e, d. v. s. de, som annars ej brukat förfara åskådligt, av allt att döma haft relativt liten fördel av att problemen på förhand blivit åskådliggjorda. Man hade kunnat vänta, att just dessa avsevärt skulle ha förbättrat sina resultat. Några enstaka av dessa fpnr synas också ha haft någon hjälp av åskådliggörandet, men beträffande andra åter har någon skillnad ej kunnat förmärkas. Så har varit fallet med fpna 1 och 22 samt i synnerhet 25.

Hur skall då detta förklaras? Troligen är det så, att dessa fpnr mindre än andra ha varit lagda för åskådliggörande och detta i så hög grad, att de ej, ehuru uppgiften vid delgivandet

redan var åskådliggjord, ville eller kunde utnyttja, vad som för de övriga fpna verkat underlättande.

Fpna tillhörande m_1 däremot ha tydligen kunnat utnyttja de åskådliggörande momenten, då de väl en gång funnos, ehuru de själva troligen haft svårt att åstadkomma dem. Därav förklaras, att deras resultat ha blivit förbättrade i så hög grad. De till grupp å hörande ha visserligen utnyttjat de åskådliggörande partierna, men skulle ej heller ha haft så synnerligen svårt att själva åstadkomma, vad som nu redan var färdigt.

De antaganden, som här gjorts, ha till fullo bekräftats av utsago- och andra särskilda försök, varvid fpna ibland uppdelats i grupperna å, m_1 och e med olika formuleringar för de olika grupperna.

Om således i stort sett ett åskådliggörande verkat underlättande vid räknearbetet, har det dock inte alltid varit så. Problemen här förut äro ju med hänsyn till fpnas ståndpunkt tämligen svåra. (Givna i realskole- eller mogenhetsexamen.) Helt annorlunda har det förhållit sig, om uppgiften varit lätt. Detta framgår av resultatet beträffande ett försök med ett annat problem.

Problemet, som delgavs, lydde: — Vad är sammanlagda ytan av två trianglar, då den enas bas är 2,4 dm. och höjd 1,8 dm.; den andras bas är 3,2 dm. och höjd är 4 dm.? —

Grupp 1 erhöll problemet, sådant det var, grupp 2 hade dessutom trianglarna uppritade och måtten angivna. Fpna hade endast att uträkna uppgiften samt anteckna tiden för dess lösande. Resultatet blev, som följer.

Tabell 19.

	Medeltal använd tid i min.	Antal rätt räknade ex. i %
Grupp 1	4,8	100
Grupp 2	4,9	92,3

Här (andra försök ha givit liknande resultat) har tydligen åskådliggörandet inte verkat underlättande. De använda tiderna äro ju varandra ungefär lika; siffrorna i fråga om rättprocenten likaså. (En fpn i grupp 2 hade råkat göra ett räknefel.) Problemet var tillräckligt lätt förut, så att åskådliggörandet inte behövdes. Fpna hade från början haft klart för sig, hur uppgiften skulle lösas. Man kan härvidlag tala om ett onödigt åskådliggörande, som kanske t. o. m. verkat tyngande. Naturligtvis måste man i detta hänseende ta hänsyn till den räknandes ståndpunkt. Vad som behövs å ett stadium, är obehövligt å ett annat.

Det är därför, som förut påpekats, synnerligen viktigt, att problemen vid dylika undersökningar äro valda med den allra största omsorg. Först när det blir ett verkligt arbete, tillämpas sättet att åskådliggöra. Det är ju för övrigt dithän man syftar även vid vanlig provräkning. Det är ju ingen idé att förelägga allt för lätta problem, ej heller allt för svåra.

Undersökningarna ha emellertid givit vid handen, att somliga fpnr förfarit mera åskådligt än andra. Visserligen ha här flera faktoror kunnat spela in, men det torde också vara säkert, att fpnas individuella läggning varit starkt bidragande. Hithörande förhållanden komma för övrigt att ytterligare skärskådas i fortsättningen.

B. **Olika analyseringssätt.**

Som vi redan förut påpekat, måste nog alltid en analys av det till lösning förelagda problemet äga rum. Men denna analys kan vara mycket olika hos olika fpnr. Av somliga sönderplockas problemet synnerligen minutiöst, hos andra märker man inte mycket av analysen. Fpn har huggit in på problemet liksom »på känn» och kanske lyckats bra eller mera på måfå och då oftast lyckats illa.

Nu är det ju så, att analysen på samma gång är en syntes, som, kan man säga, är en annan sida av analysen. Åtminstone äro analys och syntes så sammanvävda med varandra, att det

i detta sammanhang skulle vara lönlöst att behandla dem var för sig.

Kännetecknande för den grundliga analysen är ofta, att det hela sker i en viss ordning, steg för steg, ofta från början av problemet och framåt, om så går för sig. Bit för bit brytes loss och behandlas, tills det hela är genomgånget. Så sammanställas de väl bearbetade delarna och problemet får sin lösning.

Annorlunda hos fpnr, som icke analysera så grundligt. Dessa söka liksom fatta problemet med ens; någon lång och mödosam analys vilja de inte veta av. Lösningssättet skall inte framletas under sönderplockande, det bör framstå klart ändå, man liksom känner med sig, att så skall förfaras, så och så skall problemet angripas. Så följer ett hugg här, ett hugg där, en syntes av de många gånger hastigt framdragna detaljerna, tills det hela är färdigt, problemet är löst.

Nu kan det ju ibland hända, att problemens analyserande i vissa fall ej sker så grundligt, även om räknaren vanligen brukar förfara så. Är problemet för lätt för fpn, så att intet verkligt arbete behöver presteras för att han skall finna lösningssättet, d. v. s. fpn behärskar från början, efter första genomläsandet, detsamma, så är ju klart, att ingen mödosam analys behöver företagas.

Men även i motsatt fall, om problemet är för svårt för fpn, kan analysen bli mindre intensiv, än vad som är vanligt. Fpn saknar då kanske förmåga att målmedvetet analysera problemet; han hugger därför ofta in mera på måfå, tar en del här och en del där utan att riktigt kunna göra klart för sig, att det verkligen skall vara så, sammanställer dessa delar och — misslyckas vanligtvis.

Vi skola nu anföra några delar av utsagor för att belysa fpnas olika analyseringssätt. Först exempel på mera grundlig analys.

41: »— — — När han köpte 67 kg., fattades 1,34. När han köpte 61 kg., blev det 0,22 kr. över. Han köpte 6 kg. mindre än som beräknats. Dessa måste kosta = vad som fattades i förra fallet + vad som blir över i andra fallet. Alltså: 6 kg. kosta 1,34 + 0,22 = 1,56. 1 kg. kostar sjättedelen därav = 0,26 kr. — — —».

6_1: »— — — Om han köpte 61 kg., skulle pengarna räcka. Alltså var 67 kg. 6 kg. för mycket, för att det skulle räcka till. Om han köpte 67 kg., fattades honom 1,34 kr. Om han köpte 61 kg. eller 6 kg. mindre, behövde han inte de 1,34 kr. och fick ändå över 22 öre. Alltså kostade 6 kg. 1,34 + 0,22. Om 6 kg. kostade 1,56, vad kostar då 1, jo, 6 ggr mindre. 1 kg. kostade 0,26 kr. — — —».

2_2: »— — — Adolf förlorade alla sina kulor till F. För att kunna fortsätta spelet, måste han köpa nya. Han skaffade sig 24 nya kulor och fortsatte spelet. Denna gång gick det bättre för honom. Han vann nämligen tillbaka alla sina förlorade kulor och 16 kulor till, så att han vid spelets slut hade 57 kulor. Detta är ju gott och väl, men nu är frågan, hur många han hade, när han började spela. Jag vet, att han köpte 24 kulor och vann tillbaka sina förlorade + 16, och detta utgjorde tillsammans 57 st. Då lägger jag tillsamman de 24, han köpte, och de 16, han vann, och drar den summan från 57; de som då bli kvar utgöra just de, han hade, då han började. $24 + 16 = 40$; $57 - 40 = 17$. Adolf hade alltså 17 kulor, då han började spelet. Frans hade 30 st., när han slutade, och då hade han förlorat 16 till A. Vid spelets början hade han således 30 kulor + de 16 kulor, han förlorat till A. $30 + 16 = 46$. — — —».

13_4: »— — — i 12 lass 2 hl. mer på varje lass, än om han tog det i 13. Alltså måste 1 lass innehålla så mycket som $2 \cdot 12$. Således 24 hl. måste varje lass innehålla, när han tog det i 13 — — —».

24_5: »— — — Man förtjänar 30 %, om det säljes till 11,05 pr m. Procenten beräknas på inköpspriset. Kallar detta för x. Inköpspriset + % = 11,05, allt pr meter. Alltså $x + \frac{30x}{100} = 11{,}05$ — — — Alltså är inköpspriset 8,50 pr m. Nu skall handlanden emellertid nöja sig med 20 %. Hur mycket skall han då ta? Kallar försäljningspriset för x. Således, enär som förut inköpspris + % = försäljningspris : $8{,}50 + \frac{20 \cdot 8{,}50}{100} = x$ — — —».

26_8: »— — — ett hastighetsproblem. Vägen = hastighe-

ten × tiden. Vägsträckan, som tågen gå, är 93 + 232 — — —. Det ena tågats hastighet = 16; det andras 9 m. i sek. Det frågas efter tiden; den kallar jag x. Det första tågets väg $= 16x$; det andras väg $= 9x$. Dessa bägge vägsträckor måste bli $= 93 + 232$. Alltså $16x + 9x = 325$ — — —.»

17_{10}: »— — — Kan inte få någon utgångspunkt i början av exemplet. Måste nog börja med att göra allt till vete. — — — — 4 t. vete = 3 t. råg. Således 1 t. råg = $\frac{4}{3}$ t. vete, och 12 t. råg = $\frac{12 \cdot 4}{3} = 16$ t. vete, 5 t. havre = 4 t. vete. 1 t. havre = $\frac{4}{5}$ t. vete. 15 t. havre = $\frac{15 \cdot 4}{5} = 12$ t. vete. Alltså 10 t. vete, 12 t. råg och 15 t. havre = 10 + 16 + 12 = 38 t. vete. Så många t. vete 6 mil för 76 kr. 1 mil 6 ggr mer. 38 . 6 = 228 och för 1 kr. 76 ggr mindre : $\frac{228}{76} = 3$. Nu frågas efter, hur många t. vete man kan forsla 10 mil : $\frac{3}{10}$, så vidare för 50 kr. : 0,3 . 50 = 15. Alltså — — —.»

Så några utsagor av annan karaktär:

10_1: »— — — anade jag, att skillnaden i antalet kg. skulle ha stor betydelse. Men härmed kommer jag inte långt. Men nu tar jag och drar de 22 örena från 1,34. Det blir 1,12. Så mycket kosta nog 6 kg. — — — Det blir ungefär 19 öre. Det var lättvindigt, fast det såg konstigt ut — — —.»

7_2: »— — — nu tar jag och lägger tillsamman 30 och 57, så får jag nog reda på hur mycket de hade, när de slutade spela. Om man drar 24 ifrån, så får man reda på hur mycket de hade, när de började. Sen delar jag detta med 2, så får den ene 31 och den andre 32 — — —.»

9_4: »— — — multiplicerar 2 med 13 samt 2 med 12 och så drager 2 från 26, får man de 24 hl. Man antar, att ett lass innehöll så många hl. som 24. Nu tar jag och multiplicerar 24 med 13, så erhålles hela antalet hl., som förrådet bestod av, nämligen 312 hl. — — —.»

12_5: »— — — Då han förtjänade 30 % men ville ha bara 20 %, tar jag $\frac{20}{30}$ av 11,05, så får jag reda på svaret — — —.»

22_9: »Läste genom exemplet, som föreföll vara lätt. Då kärlet tömdes 8 ggr i min., blir det 160 ggr under 20 min. Det

rymde 8,5 l. Således blir detta 160 . 8,5 = 1360 l. Så fanns det 500 l. förut. 1360 + 500 = 1860. Ett annat kärl innehöll 8 l. och tömdes 9 ggr i min. Detta gör 72 l. Nu måste jag se efter, hur många min. man höll på att ösa. Det måtte bli 17 min. 17 . 72 = 1224. Men jag räknade bestämt fel på det andra kärlet. Det börjar gå runt för mig. Med 17 min. blir det 17 . 8 = 136. 136 . 8,5 = 1156. Hur ska jag nu göra? Kommer bestämt inte ut med det här exemplet i alla fall. Jo, nu föll det mig in, att jag skulle ta reda på hela vattenmängden. Det blir 1224 + 1156 + 500 = 2880. I minuten blir det 20 ggr mindre = 144 l. — — —.»

Som synes är det väsenlig skillnad på de båda kategoriernas utsagor. I förra fallet ett lösplockande bit för bit ur problemet. Vid formeluppgifter, som ex. 8, plockas ut allt efter behov för att mata in i formeln, tills ekvationen blir färdig. Det har också tydligt framgått, att de till den första gruppen hörande mycket hellre tagit till ekvationer vid lösande av problem, som kunna räknas såväl med som utan ekvationer, än de till den andra gruppen hörande. Att de förra för övrigt gärna gått i en viss ordning, t. ex. från början och framåt i »texten», även om det inte precis gällt att stoppa in i en formel, framgår av utsagorna. Så säger fpn 17, ex. 10: »Kan inte få någon utgångspunkt i början av exemplet — — —.» Vid utfrågningar med dessa fpnr har förklarats, att det »förefaller lugnande», »känns skönt», »är bra» o. s. v. att göra undan grundligt så där bitvis, »man slipper ha så mycket i huvudet», »man kan vila sig», »man kommer säkrare till slutet» o. s. v. Samtliga dessa fpnr ha också förklarat, att nedskrivandet av utsagorna, allt efter som räkningen fortskridit, ej vållat dem något besvär; tvärtom har det känts lugnt att ha det föregående så i detalj nedtecknat. All energi kunde då samlas på att klara upp en ny del av problemet, man fick tills vidare släppa det nedskrivna.

Annorlunda har det förhållit sig med de till den sista gruppen hörande. Ett sådant där stegvis skridande framåt ser man hos dem inte mycket av. De kasta sig in i problemet någonstans och göra sammanställningar utan att företaga någon, som det synes, sorgfällig analys. Visserligen skulle man kunna in-

vända, att en sådan analys gjorts i alla fall, även om den inte kommit med i utsagorna. Fpna ha ju läst igenom uppgifterna, och därunder kunde ju en analys ha ägt rum. Vid utfrågningar har framgått, att en sådan analys — om den verkligen förekommit — under läsandet av uppgiften dock måste ha varit mycket flyktig. En sådan där orienterande första genomläsning av problemet ha för övrigt de allra flesta fpnr företagit. Visserligen har en och annan gång förekommit, att någon mycket minutiöst analyserande fpn redan vid första genomläsandet grundligt behandlat del efter del, allt efter som läsandet fortskridit, men i regel har den första genomläsningen haft en lätt orienterande karaktär.

Det torde därför ej vara ur vägen att antaga, att olika grader av analyseringsintensitet verkligen förekommit hos fpna. Vilket kan då vara mest fördelaktigt — en grundlig eller svag analys — för att vinna ett gott räkneresultat? Att de svagt analyserande många gånger använt kortare tid än de övriga, visas tydligt av de minutsiffror, som stått angivna under utsagorna. Det minutiösa analyserandet tar ju alltid sin tid. Hos styva räknare, tillhörande denna grupp (svagt analyserande), står lösningssättet också klart tämligen snart. De behärska, så att säga, problemet, ha förmåga att överblicka hela komplexet, göra några raska grepp, och problemet är löst. Så t. ex. klagar fpn 8, att hon är för slö och ej kan ta problemet i ett drag, som hon annars önskade. Det tycks i vissa fall vara en fördel med ringa eller hastig analys. Lösningarna bli kanske många gånger mera eleganta och ta ej så lång tid.

Men många till denna grupp hörande äro också svaga räknare. Vad dessa fpnr beträffar, äro de allra flesta icke grundligt analyserande svaga räknare. Hos dessa tycks det inte vara av styrka utan av svaghet, som det grundliga analyserandet underlåtes. Fpna ha ibland helt enkelt huggit ned mera på måfå, som det tyckes, på någon siffra, sammanställt den med någon annan utan att närmare göra sig reda för om det är någon reson i förfarandet. Så har skett enligt 10_1, 7_2, 12_5. Men även andra, som dock ifråga om de anförda uppgifterna efter mycket osäkert irrande fått ett riktigt resultat, kunna ej — med

ledning av provräkningar och dylikt — betraktas som goda räknare.

Att en del fpnr haft motvilja för att gå stegvis i någon viss ordning, har också framgått av utsagorna angående ex. 3, som ju är ett rent sifferexempel, och som ju speciellt inbjöd att gå från början successivt framåt. I fråga om detta exempel finnas i utsagorna uttryck som: »svårt att veta, var man ska börja». »Det här talet kan jag inte överskåda», »Ett tråkigt tal, eftersom man måste räkna ut punkt för punkt» o. s. v. Dessa fpnr ha i många fall fått dåliga resultat.

Även i fråga om analysens grundlighet intaga naturligtvis en del fpnr en mellanställning. Det har inte förefunnits något tvärt avbrott, så att man kunnat inrangera samtliga fpnr i de två grupperna. De olika fpna återfinnas, så att säga, utefter hela skalan med ytterpunkterna representerade av det argaste sönderplockande å ena och knappt märkbar analys å den andra sidan. Vidare må anmärkas, att somliga fpnr, som i början, delvis förmodligen av oförmåga att företa en verksam analys, avhöllo sig från tydlig uppdelning av problemen, under undersökningarnas gång övergått till ett sådant tillvägagångssätt. Att dessa, så vitt jag kunnat finna, även i högre grad än de flesta förbättrat sina räkneresultat, bör kanske också framhållas.

Å andra sidan ha också en del duktigare räknare övergått från ett mera till ett mindre grundligt analyserande av problemen. De kanske ej haft behov av att åtminstone vid relativt lätta exempel så minutiöst plocka sönder och sammanställa. Men oavsett detta, har det tydligt framgått, att somliga fpnr på grund av sin läggning förfarit mera, andra fpnr av samma orsak däremot mindre grundligt beträffande analyseringen av problemen.

Emellertid är analyseringssättet, som förut påpekats, också beroende av problemens formulering. I detta sammanhang torde det vara nödvändigt att med ett exempel ytterligare belysa detta förhållande.

Fpna uppdelades i två likvärdiga grupper. Samma uppgift delgavs de båda grupperna, men vardera erhöll sin särskilda formulering. Problemet (ur Räknebok etc., Möller, Larsson och Lundahl) lydde: — Sigrid köpte 6 kg. ull à 2,50 kr. pr kg., som

hon lät spinna för att därav sticka strumpor. Genom spånad och tvätt gingo 0,75 kg. förlorade. För spånaden betalade hon 1,60 kr. pr kg. garn. Till varje par strumpor åtgick ¼ kg. garn, och i arbetslön för stickningen av varje par strumpor betalades 0,55 kr. Hur mycket kom varje par strumpor att kosta? —

Den förestående formuleringen (ordagrant ur den nämnda läroboken) delgavs grupp 1. Grupp 2 erhöll problemet under följande form: — Till ett par strumpor åtgick ¼ kg. garn. För *spånaden* betaltes 1,60 kr. pr kg. garn. *Stickningen* pr par uppgick till 0,55 kr. 6 kg. *ull,* som inköptes för ändamålet efter 2,50 kr. pr kg., förlorade 0,75 kg. i spånad och tvätt. Hur mycket kom ett par strumpor att kosta? —

Följande resultat erhölls:

Tabell 20.

	Medeltal använd tid i min.	Medeltal rätt räkn. ex. i %
Grupp 1	16,3	85,8
Grupp 2	10,8	92,9

Tidssiffrorna äro betydligt olika för de båda grupperna. Detta beror utan tvivel på att problemet enligt omformuleringen är lättare att analysera än i den ursprungliga formen. Vad är det då, som gör den senare formuleringen lättare?

Själva de i problemet omtalade förhållandena synas komma i naturligare följd i den förra. Det talas först om ullen, som skulle spinnas, så om spånad och tvätt och därpå om stickning. I andra formuleringen kommer uppgiften om ullen sist. Men ändå har bara denna omändring, efter vad som framgått genom försök med andra fpnr, verkat underlättande för analyseringen.

Som man finner, representeras det svåraste partiet av problemet av det, varur man skall söka reda på materialpriset. Priset är uppgivet å ullen, men genom spånad och tvätt går en del bort, vilket gör, att garnpriset blir ett annat än ullpriset. Det är detta, som verkar förvillande. Räknarna finna det krångligt och svårt att få någon utgångspunkt, bli irriterade och för-

söka visserligen analysera partiet, men det hela blir osäkert. Genom omtagningarna och irrandet förloras en avsevärd tid, räkningen blir ej heller så säker, och därmed har man sämre räkneresultat.

Annorlunda är förhållandet beträffande den andra formuleringen. Där kommer först de lätt uppklarade partierna om spånad och stickning. Under det att dessa deluppgifter behandlats, har den räknande vunnit en viss självsäkerhet. Vidare har, sedan dessa partier lösbrutits, problemet begränsats; den svåra delen har, så att säga, inringats, och räknaren kan ägna hela sin uppmärksamhet åt just detta utan att besväras av tanken, att det dessutom hänger samman med andra ännu ej uppklarade delar.

Nu kan man ju mena, att det stått fpna fritt att ändå börja med de lättare partierna. Sant är också, att somliga fpnr förfarit på så sätt. Men de flesta ha nog blivit tvingade därtill av nyss anförda skäl och ha innan dess företagit åtskilliga analyseringsförsök, vilket tagit avsevärd tid i anspråk. Ty det är att märka, att de flesta fpna, särskilt de starkt analyserande, gärna velat gå i ordning från början.

En annan sak, som, enligt undersökningar med andra fpnr, verkat underlättande, är att orden »spånaden», »stickningen» och »ull» markerats. Härigenom ha de »springande punkterna» i problemet framträtt tydligt från början, och energien har kunnat koncentreras kring dem från första ögonblicket.

Det synes, som om den första formuleringen skulle vara mera åskådlig än den andra. I den förra heter det: »Sigrid köpte — — — som hon lät spinna för att därav sticka strumpor — — —. För spånaden betalade hon.» Sådana moment sakna — alldeles i den senare formuleringen. Av specialundersökningar har emellertid framgått, att dylikt åskådliggörande på intet sätt verkat underlättande för analyseringsarbetet. Förhållandet *kan* vara annorlunda i fråga om barn, men även de kunna många gånger erhålla sämre räkneresultat, om problemen bli för mycket på så sätt åskådliggjorda. Intresset fångas då mera av dessa moment, och själva räkningen blir en bisak. I fråga om äldre är faran härvidlag mindre, men texten blir tyngre, och analyseringen tar ofta längre tid.

Vad fpna 1—28 beträffar, har genom åtskilliga försök konstaterats, att de grundligt analyserande lidit mest avbräck av otillfredsställande formuleringar av problemen. De använda tiderna för lösningarna synas ha blivit avsevärt längre. Rätt-

Tabell 21.

Fpn	Förfaringssätt	Antal rätt räknade ex. i %	Avvikelse från medelproc. (69)
1	m_2	70	+1
2	a	80	+11
3	s	40	−29
4	a	56	−13
5	a	100	+31
6	a	80	+11
7	s	40	−29
8	s	90	+21
9	s	40	−29
10	s	60	−9
11	m_2	60	−9
12	s	60	−9
13	a	80	+11
14	m_2	50	−19
15	m_2	60	−9
16	m_2	50	−19
17	a	80	+11
18	a	90	+21
19	m_2	90	+21
20	m_2	70	+1
21	m_2	80	+11
22	s	50	−19
23	m_2	88	+19
24	a	100	+31
25	s	60	−9
26	a	90	+21
27	m_2	56	−13
28	m_2	70	+1

procenten däremot har inte minskats i motsvarande grad. Dessa fpnr ha av utsagorna att döma sysslat ganska mycket även med de anförda oväsentliga delarna. De svagt analyserande ha ännu mindre än annars underkastat dylika partier analys.

I tabell 21 grupperas i tre avdelningar enligt föregående så, att de genomgående starkt analyserande betecknas med a, de genomgående svagt analyserande med s och de, som intaga en mellanställning, med m_2. Som klart är, måste gränserna härvidlag bli flytande. Jag har därför, här som förut, förfarit så, att de fpnr, varom tvekan i fråga om platsen i grupperingen rått, hänförts till gruppen m_2. Detta för att få de övriga så rena som möjligt.

Vi ha således 9 i gruppen a, 8 i gruppen s och 11 i gruppen m_2.

De olika gruppernas räkneresultat framgår av följande:

Tabell 22.

Medeltal rätt räknade ex. i % av	Avvikelse från medelproc. (69)
Fpnr, tillh. gruppen a: 84	+15
» » » s: 55	−15
» » » m_2: 68	−1

Av tabellen framgår tydligt, att de bästa räknarna finnas inom gruppen a och de sämsta inom gruppen s. Medeltalet av de till gruppen m_2 hörande kommer den för samtliga fpna uträknade medelprocenten mycket nära. Till gruppen s hör egentligen endast en fpn (8) av de säkrare räknarna. Denna har dock varit en av de allra bästa och ofta förvånat med mycket eleganta lösningar. Sådana fina lösningar ha nog också förekommit hos andra till denna grupp hörande, men fpna ha ibland totalt misslyckats, varför deras medelprocent blivit låg. Till sist höra också till denna grupp de allra svagaste räknarna, och det är ju dessa, som så väsentligt dragit ned medelprocenten för gruppen.

C. Olikheter i fråga om omedvetna moment.

Att ett visst mått av medvetenhet i fråga om mål och medel vid lösandet av ett problem, som vållar en smula arbete, måste förefinnas, är ju tydligt. Men det kan icke nekas till att en del av arbetet ibland sker nästan eller alldeles omedvetet eller undermedvetet. Det är en bekant sak, att svåra problem, vars lösande man i början inte kommit ut med, och som man därför måst lämna, sedermera av någon anledning dyka upp i medvetandet igen, och, vad bättre är, lösningssättet står ofta med ens klart. Som exempel därpå vill jag anföra ett fall ur egen erfarenhet. En min studiekamrat arbetade ofta på lösandet av matematiska problem. Det hände också ofta, att han inte lyckades finna lösningen, ehuru han arbetade i timmar med en och samma uppgift. Så tröttnade han till sist, vilade sig eller övergick till något annat arbete. Men därunder inträffade ej sällan, att lösningssättet till det förut så intensivt bearbetade problemet stod klart med ens. Han nedskrev då lösningen, och efteråt genomgingo vi densamma, som många gånger var mycket fin. Och detta inträffade ej bara en gång utan upprepades ofta.

Emellertid behöver det inte alltid förflyta så lång tid för att omedvetet arbete eller, rättare sagt, resultatet av det omedvetna arbetet skall visa sig. Det torde inte råda något tvivel om att omedvetet arbete ibland är tillfinnandes, då man sitter och funderar över något matematiskt problem utan att tämligen snart finna lösningen. Det har kanske »hakat upp sig», man tänker visserligen på problemets lösning men har kanske ofta svårt att ange, i vilken riktning tankarna gå. Men så i ett slag står kanske allt klart, lösningssättet är funnet. Det är inte så sällan, som sådana uppslag komma, då man kanske tröttnat och är nära att uppge alltsammans. Att större eller mindre partier av lösningen sker omedvetet bevisas ock därav, att man inte i detalj kan göra reda för hur man kommit till det och det resultatet.

För övrigt är det ju så, att omedvetna moment förekomma vid allt tankearbete. Det är inte alltid, som tankarna formuleras i ord, i en tankekedja (härvid avses naturligtvis även den »tysta» formuleringen), och ändå kommer man till ett visst resultat. Man är ej medveten om hur man kommit till det. Åtminstone i fråga om små detaljer äger omedvetet arbete rum hos vilken person som helst.

Så ock i fråga om dessa fpnr. Men en avsevärd skillnad har dock kunnat konstateras. Redan vid förundersökningarna framkom åtskilligt, som tydde på att somliga fpnr i högre grad än andra arbetat omedvetet. Hos en del märkte man däremot mycket litet därav.

Några brottstycken ur utsagorna angående de förut anförda exemplen må anföras:

1_4: »— — — Sedan jag funderat länge utan att komma någonstans, föll det mig plötsligt in, att det var de 2 hl., jag skulle använda mig utav. Det är klart, att dessa bilda det 13:e lasset. — — —».

11_5: »— — — Medan jag tänkte över hur jag skulle få upp någon ekvation, blev det klart, att det gick mycket lättare att jämföra 11.05 och det sökta priset med 130 och 120 — — —».

8_8: »— — — under det jag ritade upp tåglängderna, fick jag plötsligt klart för mig, hur problemet skulle lösas — — —».

25_{10}: »— — — inte på länge kunde finna något sätt. Så dum jag är! Naturligtvis skall jag göra allt till vete — — —».

Naturligtvis äro inte dessa utsagor något säkert bevis för att omedvetet arbete ägt rum. Det är först genom utfrågning av de fpnr, hos vilka jag misstänkte, att ett sådant moment förekommit, som jag trott mig med tämligen hög grad av visshet kunna anta, att så varit fallet. Fpna ha därvid förklarat, att lösningssättet blivit klart för dem så där burdus, utan att de egentligen visste, på vilket sätt det hela skett. Många gånger ha de arbetat utefter helt andra linjer, då de helt plötsligt fått en impuls att göra så eller så.

I fråga om detta sakförhållande har det varit ännu svårare än i föregående fall att uppdela fpna i grupper. Utsagorna lämna i många fall blott vaga antydningar, och oaktat fpna efteråt utfrågats, har det i en del fall varit nästan omöjligt att

ens avgöra, om det varit sannolikt, att förhållandet varit det ena eller det andra.

För att erhålla säkrare resultat, delgåvos några uppgifter, som på grund av sin natur borde mer än andra locka fram omedvetna moment hos de räknande. Dessa problem voro med hänsyn till fpnas ståndpunkt rätt svåra och vidare var det inte så lätt att få någon utgångspunkt. Problemen voro tämligen »beniga», men då lösningssättet en gång blivit funnet, ytterst lätt uträknade.

Ett ex. å dessa uppgifter må anföras: — I en stad betalade en husägare $\frac{1}{7}$ av hyrorna i skatt. Då sedermera denna skatt höjdes och kom att utgöra $\frac{1}{6}$ av samma hyresbelopp, hur mycket behövde ägaren höja hyrorna för att hava samma inkomst övrig som förut? (Givet i mogenhetsexamen.) —

Det visade sig ej vara så alldeles lätt för fpna att komma till rätta med problemet. En orsak till detta är ju, att ingen särskild hyres- eller annan summa är nämnd utan endast vissa delar av icke uppgivna sådana. Sifferuppgifterna äro för övrigt så sparsamma, att fpna känt sig förbryllade.

Några utsagor angående fpnas behandling av detta problem:

Fpn 2: »— — — men kunde ej komma någon vart med problemet. Han betalade nu $\frac{1}{7}$ av hyrorna i skatt. Men så utgjorde den sedan $\frac{1}{6}$. Nu skulle han förstås höja hyrorna, men hur mycket? Om man vetat, hur mycket han fick i hyra, eller hur mycket han betalade i skatt! Jag kallar hyresbeloppet för a. Då blir $\frac{a}{6} = \frac{a+x}{7}$, om x är ökningen. Härav erhålles — — — $x = \frac{a}{6}$. Men det vet jag ju förut, att det skulle vara $\frac{1}{6}$. Hur ska jag nu bära mig åt? Antar, att hyran är 42 000 kr. Då är $\frac{1}{7} = 6\,000$ och $\frac{1}{6} = 7\,000$. Så mycket som 7 000 är mer än 6 000 ökades naturligtvis, d. v. s. 1 000 kr. Men nu vet jag ingenting om summan. Men jag måste väl ha någonting liknande. $\frac{1}{7}$ måste vara lika med $\frac{1}{6}$ — ökningen. Då får jag $\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + x$ — — —».

Fpn 28: »— — — och tyckte, att talet var lite konstigt. Funderar nu, hur mycket han skulle öka, men finner ingen utväg. Han ökade nog betydligt. Men hur mycket? Jo, så dum

Tabell 23.

Fpn	Förfaringssätt	Antal rätt räknade ex. i %	Avvikelse från medelproc. (69)
1	o	70	+1
2	i	80	+11
3	m_3	40	−29
4	m_3	56	−13
5	i	100	+31
6	i	80	+11
7	m_3	40	−29
8	o	90	+21
9	m_3	40	−29
10	m_3	60	−9
11	o	60	−9
12	m_3	60	−9
13	i	80	+11
14	m_3	50	−19
15	o	60	−9
16	m_3	50	−19
17	i	80	+11
18	i	90	+21
19	i	90	+21
20	m_3	70	+1
21	i	80	+11
22	m_3	50	−19
23	m_3	88	+19
24	i	100	+31
25	o	60	−9
26	m_3	90	+21
27	m_3	56	−13
28	o	70	+1

jag är, det är klart, att man tar skillnaden mellan $\frac{1}{6}$ och $\frac{1}{7}$. Att jag inte kom på det med samma — — —».

Tillvägagångssätten äro, som synes, rätt olika. Under det att fpn 2 försöker sig på analys och så tvingas att åskådlig-

göra uppgiften med fingerade tal, innan lösningssättet hittades, synes fpn 28 endast i allmänhet »ha funderat» över den, tills vägen helt plötsligt stått klar.

Vid dessa försök har det visat sig, att de fpnr, hos vilka man kunnat påvisa tämligen mycket av omedvetna moment, i fråga om den för problemens lösning använda tiden rett sig betydligt bättre än de, vilkas utsagor saknat eller varit fattiga på sådana. De senare fpna ha försökt analysera och åskådliggöra, även där de haft ytterligt svårt att få något fast grepp på problemet. De förra däremot ha efter en stunds funderande plötsligt »kommit på» lösningssättet. Visserligen ha de ibland kommit fel, men många fina lösningar ha också presterats. Särskilt har fpn 8 briljerat i detta avseende.

De fpnr, hos vilka man tämligen genomgående kunnat spåra omedvetna moment, betecknas i tabell 23 med o; de, som tyckas vara tämligen fria därifrån, med i; de återigen, som inta en mellanställning, med m_3. I tveksamma fall ha fpna hänförts till den sista gruppen.

Av tabellen framgår, att till gruppen o hänförts 6, till gruppen i 9 och till gruppen m_3 13 fpnr. Redan genom en blick på tabellen får man klart för sig, att de till den första och den andra gruppen hörande äro de bästa räknarna. Detta gäller särskilt den andra gruppen. Närmare beräknat ter sig detta förhållande sålunda:

Tabell 24.

Medeltal rätt räknade ex i % av		Avvikelse från medelproc. (69)
Fpna, tillh. gruppen o:	68	−1
» » » i:	87	+18
» » » m_3:	58	−11

Den första gruppen kommer medeltalet (för samtliga fpnr) mycket nära. De till den andra gruppen hörande äro de allra bästa räknarna (medeltal: 87), under det att de till gruppen m_3 hörande ej fått sitt medeltal högre än 58.

Av siffrorna, som förut anförts, se vi, att de till grupperna m_1 och m_2 hörande fpna även i fråga om räkneresultat inta en mellanställning. Annorlunda förhåller det sig med de till m_3 hörande. Dessa visa sig nämligen vara de allra sämsta av de tre grupperna o, i och m_3. Här är det o, som intar mellanställningen. Varpå kan då detta bero? Som redan berörts, kunna de omdvetna momenten ibland vara av ett visst värde. En idé, en många gånger elegant lösning kan bli klar så där omedelbart, utan att fpn medvetet eller målvedmetet strävat att komma till just denna. På så sätt synas dessa omedvetna moment ha utgjort en viss styrka. Så t. ex. hos fpn 8, där dessa moment — man må sedan kalla dem intuition eller något annat — för det allra mesta hittat rätt. Men så finns det andra fpnr, hos vilka man också finner sådana där hastigt påkomna idéer, som rett sig relativt dåligt. Man är frestad antaga, att dessa fpnr många gånger huggit till mera på måfå, men det är ytterst svårt för att inte säga omöjligt, att i en del fall avgöra, hur det verkligen gått till.

Emellertid är det nog så, att många av dessa fpnr, som huggit till på måfå, just hamnat i gruppen m_3. De synas inte vara alldeles fria från omedvetna moment, men det torde vara oriktigt att påstå, att dessa moment varit till finnandes i större utsträckning. Många av dessa fpnr, som på måfå huggit in på problemen, ha följaktligen hänförts till m_3, enär de onekligen intagit en mellanställning i omskrivna avseende.

Det bör emellertid påpekas, att uppdelningen i grupper i fråga om de tre olika hänseendena ingalunda kunnat göras med någon matematisk noggrannhet. Det har kostat otrolig möda att särskilja fpna i de olika grupperna; särskilt har detta varit fallet i fråga om gränsfallen. Distinktionen måste vara den skarpast möjliga för att ge värde åt därpå byggda sammanställningar och slutsatser. Vid fpnas inordning i de särskilda grupperna ha använts två metoder. Den ena har bestått däri, att antalet fall, som för övrigt var för sig värderats inom skalan 1, 2, 3, sammanräknats. Ett slags poängräkning alltså. Så t. ex. har i fråga om åskådlighetsgraden fpnas alla åskådlighetsförsök sammanräknats; de olika försöken ha värderats så, att ett svagt fått gälla för 1, ett medelmåttigt för 2 och ett kraftigt

för 3. Härigenom ha jämförelsetal erhållits för de olika fpna i de olika hänseendena. Den andra metoden, som använts i andra hand, har bestått däri, att jag synnerligen grundligt studerat utsagorna och försökt tränga in i minsta detalj beträffande fpnas tankegång. Detta har ju varit ett oerhört arbete, då utsagorna bara i fråga om de tio problemen uppgått till närmare 300. Så har fpn hänförts till den ena eller andra gruppen allt efter den uppfattning, som erhållits angående tillvägagångssättet. Detta har varit lätt nog i fråga om de mera utpräglade förfaringssätten. Beträffande dessa fpnr ha också de båda metoderna givit resultat, som stämt väl överens. Värre har det varit i en del andra fall. Att till exempel avgöra, om en fpn med icke utpräglat tillvägagångssätt skulle hänföras till o eller m_3, har helt naturligt varit utomordentligt svårt.

Fpna ha återfunnits utefter, så att säga, hela skalan i fråga om de anförda synpunkterna, men de voro ej alldeles jämnt fördelade utefter denna skala. Så kunde poängsiffrorna på en del ställen vara tämligen sammanträngda, på andra däremot förefunnos stora avbrott. Om nu den förut nämnda andra metoden gav samma resultat och någon revidering på grund av jämförelsen med denna ej var nödvändig, och om detta avbrott i skalan ej låg allt för långt åt yttergränserna och ej heller för nära mitten, var det ju lämpligt att sätta gränsen just där. Så har i fråga om åskådlighetsgraden 11 fpnr kommit att hänföras till de starkt åskådliga, 9 till den medelmåttigt och 8 till den svagt eller ej »åskådliga» gruppen. Beträffande det sist behandlade hänseendet (medvetna moment) ha 6 fpnr hänförts till första gruppen, inte mindre än 13 till den andra och 9 till den sista gruppen. Grupperingen i detta sista hänseende har för övrigt varit svårare att göra än i de förra. I en del tveksamma fall har, som förut nämnts, fpna hänförts till någon av m-grupperna för att få de mera intressanta yttergrupperna renare. Härvid har också den andra metoden ofta fått fälla utslaget. Erinras bör, att jag synnerligen väl känt till samtliga fpnr från undervisningen i matematik och andra ämnen, samt att jag tagit med i beräkningen de omständigheter, som framkommit därvid, vilka kunnat belysa de förhållanden, som här varit fråga

om. Jag skulle också hålla före, att denna sista metod varit säkrare, ehuru den icke givit svar i siffror.

Emellertid inbillar jag mig ingalunda att ha lyckats göra distinktionen fullkomlig. Det måste eftertryckligt framhållas, att de siffror, som erhållits som resultat, icke kunna vara exakta mätare på de förhållanden, de avse att belysa. Det värde man kan tillägga dem är, att de helt säkert peka i rätt riktning i fråga om de förhållanden, som här avhandlats. Alldeles tydligt är således exempelvis, att bland dessa fpnr de till den åskådliga typen hörande ha varit bättre räknare än de, som inrymmas i den icke åskådliga. Men att siffrorna i det föregående beträffande dessa saker skulle med matematisk noggrannhet angiva detta förhållande, är naturligtvis omöjligt. Då man inte har en matematisk grund att bygga på, kan man naturligen ej heller få ett resultat, som är matematiskt riktigt.

Utom de individuella olikheter, som förut anförts — olikheter i fråga om åskådlighet, analysering och omedvetna moment — har man i utsagorna kunnat spåra en hel del andra, t. ex. större eller mindre säkerhet beträffande mera mekaniskt utförda saker och därmed i sammanhang stående större eller mindre förmåga att åt dylikt ge nödig koncentration av uppmärksamhet (fel å de enklaste saker, t. ex. å multiplikationens område, ha förekommit, men mindre mot slutet än i början och mindre hos å- och a-grupperna än hos andra), större eller mindre förmåga att kombinera och syntetisera (oförmåga i detta avseende har någon gång kunnat spåras även hos fpnr, som analyserat tämligen minutiöst), mer eller mindre säkerhet, då det gällt att i problemet finna lämplig angreppspunkt, större och mindre förmåga att sätta sig in i problemets natur (även i språkligt avseende), olika säkerhet i fråga om räkningens riktighet o. s. v. Men sådana och andra olikheter ha ej här blivit föremål för närmare behandling. Dels ha dessa förhållanden kommit till synes mera sporadiskt, dels ingå de till en del i de förut behandlade hänseendena.

Typer och huvudmoment vid problemlösandet.

Genom sammanställning av föregående tabeller erhålles:

Tabell 25.

Fpnr	Förfaringssätt			Medeltal rätt räknade ex. i %	Avvikelse från medelprocenten(69)
	Grad av åskådlighet	Analyseringssätt	Omedvetna moment		
1	e	m_2	o	70	+ 1
2	å	a	i	80	+11
3	e	s	m_3	40	−29
4	e	a	m_3	56	−13
5	e	a	i	100	+31
6	å	a	i	80	+11
7	e	s	m_3	40	−29
8	å	s	o	90	+21
9	e	s	m_3	40	−29
10	m_1	s	m_3	60	− 9
11	m_1	m_2	o	60	− 9
12	m_1	s	m_3	60	− 9
13	å	a	i	80	+11
14	e	m_2	m_3	50	−19
15	m_1	m_2	o	60	− 9
16	m_1	m_2	m_3	50	−19
17	å	a	i	80	+11
18	å	a		90	+21
19	å	m_2	i	90	+21

Fpnr	Förfaringssätt			Medeltal rätt räknade ex. i %	Avvikelse från medelprocenten(69)
	Grad av åskådlighet	Analyseringssätt	Omedvetna moment		
20	å	m_2	m_3	70	+ 1
21	å	m_2	i	80	+11
22	e	s	m_3	50	−19
23	å	m_2	m_3	88	+19
24	å	a	i	100	+31
25	e	s	o	60	− 9
26	m_1	a	m_2	90	+21
27	m_1	m_2	m_3	56	−13
28	m_1	m_2	o	70	+ 1

Nu kunde man ju utföra vidlyftiga korrelationsräkningar beträffande dessa grupper. Men här som i många andra fall i fråga om psykologiska undersökningar kunna ju exempelvis korrelationskoefficienter ej vara några som helst exakta mätare på de förhållanden, som skola bestämmas. I synnerhet som fpna varit relativt få och en fullt distinkt värdesättning många gånger ej kunnat göras, vore det måhända ändamålslöst och t. o. m. oriktigt att på så sätt bearbeta materialet.

Redan förut har dock de olika gruppernas räkneresultat ställts i enkelt samband med det allmänna räkneresultatet. Naturligtvis kunna inte heller dessa siffror vara några fullt noggranna mätare å förhållandena i fråga. Men att de peka hän i rätt riktning, att de — om också icke med matematisk noggrannhet — belysa och angiva vissa förhållanden beträffande dessa fpnr, är otvivelaktigt. Att således de åskådliga och starkt analyserande typerna inom sig hyst flera duktiga räknare än de icke åskådliga och svagt analyserande, torde vara visst. Likaså framgår, att de strängt »målmedvetna» lyckats bättre än de, hos vilka man kan påvisa omedvetna moment, ehuru ju dessa senare ingalunda alltid ha visat sig vara de sämsta räknarna.

Kasta vi en blick på den sista tabellen, finna vi, att en del förfaringssätt i fråga om de olika synpunkterna ha ett visst

samband med varandra. Så höra beträffande grupperna å och a med resp. 11 och 9 fpnr inte mindre än 6 till bägge. En tydlig korrelation således. Likaså mellan a och i, å och i, e och s samt å—a—i. Det vore frestande att kombinera de olika grupperna i samtliga möjliga fall och sammanställa de olika kombinationerna med resp. räkneresultat. Men kombinationernas antal par om par i fråga om å, e, m_1, a, s, m_2, o, i och m_3 bli inte mindre än 36 enligt formeln

$$\frac{n(n-1)}{2},$$

där n är antalet leder. I detta fall äro dessa 9; alltså blir antalet sådana kombinationer

$$\frac{9(9-1)}{2} = 36.$$

Nu kunna dock naturligen inte några kombinationer inom samma kategori göras, Så t. ex. kan inte å kombineras med e och m_1 Antalet minskas därigenom enligt formeln

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

till 27, men detta är ju många nog. Därtill komma kombinationer med tre och tre leder, t. ex. å—a—i. Dessa sista kombinationer bli lika många. Ty enligt formeln

$$n^m,$$

där n är ledernas antal i varje grupp och m antalet grupper, få vi

$$3^3 = 27.$$

Med dessa få fpnr ligger det således knappast inom möjligheternas gränser att få fram samtliga kombinationer. Ej heller är det mycket bevänt med sammanställandet av räkneresultaten

och kombinationen, då denna har en enda utövare. Denna sammanställning säger inte mycket om kombinationens värde.

I fråga om en del kombinationer framgår dock av tabellen, att en tydlig korrelation är till finnandes. En sådan av de trelediga (som ju böra ha större värde, enär samtliga här förut anförda synpunkter där inrymmas) är kombinationen å—a—i. Inte mindre än 6 fpnr (antalet fpnr i grupperna å, a, i äro resp. 11, 9 och 9; således är 9 det högsta möjliga antalet) ha arbetat i överensstämmelse med denna kombination.

Tabell 26.

Fpnr	Förfaringssätt			Medeltal rätt räknade ex. i %	Avvikelse från medelprocenten(69)
	Grad av åskådlighet	Analyserings-sätt	Omedvetna moment		
2	å	a	i	80	+11
6	å	a	i	80	+11
13	å	a	i	80	+11
17	å	a	i	80	+11
18	å	a	i	90	+21
24	å	a	i	100	+31
				Medeltal 85	Medeltal + 16

Av tabellen framgår, att samtliga dessa fpnr äro styva räknare. Alla ha nått över medeltalet av samtliga fpnrs räkneresultat. Detta t. o. m. i så betydlig grad, att medelprocenten gått upp till 85 mot samtligas 69. Av detta att döma skulle denna kombination ha högt värde, eller ock skulle duktiga räknare i regel använda sig av ett sådant tillvägagångssätt. Alltså skulle, enligt dessa undersökningar, åskådligt förfaringssätt, grundligt analyserande och fattigdom i fråga om omedvetna moment höra ihop med goda räknare och gott räkneresultat. Att så skulle vara förhållandet, har redan framgått av det föregående, enär ju å-, a- och i-grupperna var för sig stå främst i fråga om räkneresultat.

Nästa fullständiga kombination (alla tre lederna), som före-

kommer hos ett flertal fpnr, är e—s—m_3. Denna kombination har fyra utövare.

Tabell 27.

Fpnr	Förfaringssätt			Medeltal rätt räknade ex. i %	Avvikelse från medelprocenten(69)
	Grad av åskådlighet	Analyserings-sätt	Omedvetna moment		
3	e	s	m_3	40	−29
7	e	s	m_3	40	−29
9	e	s	m_3	40	−29
22	e	s	m_3	50	−19
				Medeltal 43	Medeltal − 27

Hit höra, som synes, de allra sämsta räknarna. Ingen enda når ens närmelsevis upp till medeltalet (69 %). En annan kombination, som står denna tämligen nära, är m_1—s—m_3. Denna har använts av fpna 10 och 12, vilka ej heller nått upp till medeltalet. Att den i tabellen anförda kombinationen var svag, kunde man med ledning av det förut anförda för övrigt lätt förutse, då e-, s- och m_3-grupperna var för sig i fråga om räkneresultatet legat betydligt under.

Mellan dessa, som man skulle kunna kalla dem, ytterlighetskombinationer finnas sedan en hel mängd andra. Dessa ha dock ej var för sig många utövare bland dessa fpnr. Näst i ledet kommer m_1—m_2—o med tre fpnr (fpna 11, 15 och 28). Samtliga dessa fpnrs räkneresultat ligga tämligen nära medeltalet. Motsvarande grupper ha ju också förut intagit en mellanställning.

Vidare ha vi kombinationerna m_1—m_2—m_3 (fpna 16 och 27); å—m_2—i (fpna 19 och 21); å—m_2—m_3 (fpna 20 och 23). Ännu sällsyntare kombinationer äro e—m_2—o (fpn 1); e—a—m_3 (fpn 4); e—a—i (fpn 5); å—s—o (fpn 8); e—m_2—m_3 (fpn 14); e—s—o (fpn 25); m_1—a—m_3 (fpn 26). Av dessa stå å—m_2—i gruppen å—a—i mycket nära. Fpna 19 och 21 visa sig också vara mycket goda räknare. Av de fpnr, som använt de sällsynta

kombinationerna e—a—i, å—s—o och e—s—o (intet m_1, d. v. s. ingen mellanställning i något avseende intages), är den fpn, som använt sig av det andra sättet, synnerligen duktig räknare, den som kanske i allmänhet löst uppgifterna mest elegant.

Nu kan ju ifrågasättas, huruvida åskådliggörande, analyserande och omedvetna moment äro från varandra strängt skilda saker. Hör inte t. ex. starkt åskådliggörande och utförlig analys nödvändigtvis samman? Att något som på verksamt sätt skall åskådliggöras också måste analyseras, är säkert. Emellertid behöver denna analys av ett problem inte överallt vara så minutiös, för att ett åskådliggörande skall kunna äga rum. Det har visat sig, att någon enstaka fpn (särskildt fpn 8) huggit ned på en viss del av problemet och rätt utförligt åskådliggjort denna, men för övrigt har uppgiften tagits mera på »känn». Fpn har härigenom fått hög poängsiffra beträffande åskådliggörande men låg i fråga om analyserande.

Ej heller behöver starkt analyserande nödvändigtvis föra med sig ett utförligt åskådliggörande. I åskådliggörandet ligger också, att problemet eller delar därav omformas och därmed göres lättare tillgängligt för intellektet, göres mera fattbart och begripligt. Nu kan ju ett sönderplockande äga rum, utan att en sådan omformning behöver ske.

Emellertid följas — beträffande dessa fpnr — motsvarande grader av åskådliggörande och analyserande oftast åt (se tab. 25, 26 och 27). Detta kunde man också ha skäl att vänta, även om det inte överallt och alltjämt behöver vara en sådan motsvarighet.

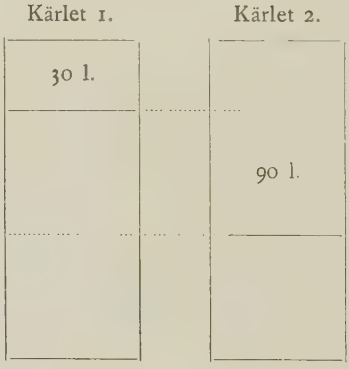
Det kan synas, som om grundlig analys skulle utesluta förekomsten av omedvetna moment. Där ett grundligt sönderplockande äger rum, bör, förefaller det, intet rum givas för moment, som ha karaktär av omedvetenhet. Och å andra sidan tyckes det, som om de personer, hos vilka sådana moment rikligt förekomma, ej skulle kunna gå så minutiöst tillväga vid analyserandet. I regel ha också graden av analys och medvetet arbete hos en och samma fpn förekommit i ett förhållande, som varit omvänt proportionellt. Hos enstaka fpnr har dock förhållandet varit något annorlunda. Så t. ex. beträffande fpn 28. Utsagorna ge vid handen, att oaktat analyserandet

under undersökningarnas gång blivit allt grundligare, så förekomma de omedvetna momenten allt fortfarande. Detta är ej heller så märkvärdigt, då det omedvetna arbetet mera har karaktär av syntes. Emellertid synes analysen och syntesen ha varit så inflätade i varandra och så svårskiljbara, att man omöjligen ur utsagorna kunnat utleta, vad som varit dominerande vid ena eller andra tillfället. (Syntetiserandet har därför ej, såsom analyserandet, i dessa undersökningar upptagits som ett särskilt moment). För övrigt tycks det i allmänhet vara så, att graden av analys är en förutsättning för eller medföljer motsvarande grad av syntes.

Dock torde det vara så, att åskådliggörande, analyserande (och syntetiserande) och omedvetna moment endast äro olika faser av en och samma sak, nämligen analys och syntes. Åskådliggörandet är ingenting annat än ett led i analysen och syntesen. Några exempel, som belysa detta förhållande, må anföras.

Ett av de förut behandlade problemen lyder: — Två kärl innehålla lika mycket vatten. Ur det ena avtappas 30 l. och ur det andra 90 l., varefter det ena innehåller dubbelt så mycket som det andra. Hur mycket innehöllo kärlen ursprungligen? —

Somliga fpnr åskådliggjorde problemet, och detta skedde i regel på så sätt, att de båda kärlen uppritades bredvid varandra med det avtappade eller det kvarvarande vattnet markerat ungefär på följande sätt:



Enligt utsagorna har uppritandet av kärlen i regel skett på mycket tidigt stadium av räknearbetet. Redan uppritandet av själva kärlen är en tydlig analys, en mera intensiv analys kan man säga, enär motsvarande punkter i texten därigenom särskilt markerats. Så fortsättes analysen. De 30 l. markeras i kärlet 1 och de 90 i kärlet 2. Så skulle kärlet 1 innehålla dubbelt så mycket som kärlet 2. Även detta har plockats ut och åskådliggjorts av många. Visserligen passade inte kanske de förut gjorda uppdelningarna av kärlen till detta sista, men då ha fpna i flera fall ändrat teckningen, så att proportionerna motsvarat uppgifterna i problemet.

Hela tiden har således åskådliggörandet tjänat att skärpa analysen. Redan har nog en god del syntes förekommit, ehuru räknearbetet hittills mest haft karaktär av analys. I fortsättningen — åskådningsmaterialet får fortfarande göra tjänst — blir det mera av syntes.

Somliga fpnr, som icke använt sig av ekvationer, ha tagit saken ungefär så här: — De bägge prickade linjerna dragas. Härigenom samlas uppgifterna och åskådliggörandet på ett kärl. Eftersom ur kärlet 2 tappats 90 l., så är rymden mellan den prickade linjen och den markerade vattenytan 60 l. Men detta är lika mycket, som var kvar i kärlet, eftersom alltsammans från bottnen upp till den prickade linjen är dubbelt så mycket, som var kvar. Alltså innehåller vardera kärlet $30 + 60 + 60 = 150$ l. — Åskådliggörandet har, som synes, varit ett förtydligande led i den behövliga analysen och syntesen.

Även för dem, som använt sig av ekvationer, har åskådliggörandet blivit ett medel att göra analysen och syntesen klarare. Dessa fpnr ha i regel nöjt sig med att upprita de bägge lika stora kärlen samt markera avtappningarna. Så långt har förfarandet varit ungefär lika med vad som förut angivits. Så har det gällt att göra sammanställningar för att få upp ekvationen. Detta har skett ungefär så: — Det frågas efter kärlens storlek; alltså kallar jag denna för x. Då innehåller (enligt ritningen) ena kärlet $x - 30$ och andra kärlet $x - 90$. Direkt ur problemet erhålles, att det ena kärlet innehåller dubbelt så mycket som det andra, d. v. s. $x - 30 = 2\,(x - 90)$. — Åskådliggörandet är, kan man säga, en förenklad omformning av pro-

blemet eller delar därav, varigenom analysen och syntesen lättare kan utföras.

Även det åskådliggörande, som består i att insätta lätthanterliga, fingerade tal, är ett stycke analys och syntes. Sådana fall ha förut behandlats. En hithörande uppgift lydde: — En person sade till en annan: »Jag är dubbelt så gammal, som du är nu, och då du blir så gammal, som jag är nu, skola våra år tillsammans utgöra 63.» —

Problemet är ingalunda lätt att analysera och syntetisera. Men genom att, som flera fpnr gjort, insätta enkla, rimliga tal och sammansätta ett fingerat fall av liknande beskaffenhet (se sid. 87) har uppgiften blivit i hög grad förenklad, d. v. s. ett gott stycke analys och syntes har därigenom blivit utfört.

Så ock vid annat åskådliggörande. Fpna ha t. ex. genom att jämföra uppgifter i ett problem med sina erfarenheter från praktiska livet lyckats komma till rätta med detsamma. Genom denna jämförelse har ju ett analyserings- och syntetiseringsarbete utförts.

Även de omedvetna momenten kunna hänföras till analysen och syntesen. Nu har det, som förut påpekats, varit ytterligt svårt att skilja angripandet på måfå från de omedvetna företeelserna. Men både det ena och andra hör till analyserings- och syntetiseringsarbetet fastän till olika faser därav. Angripandet av ett problem på måfå karakteriseras ofta av att sifferuppgifterna i problemet ryckas loss och utan vidare sammanställas. Några otränade fpnrs behandling av den nyss anförda uppgiften om de två lika stora kärlen, varur tappades 30 och 90 l. resp., kan ju anföras för att belysa detta förhållande. De ha gått tillväga ungefär så: — $90 - 30 = 60$; $2 \cdot 60 = 120$. —

Här ha uppgifterna tagits ur problemet och sammanställts utan *logisk* analys och syntes. Den har här tydligen varit av *associationsartad* karaktär. Något noggrant sönderplockande och väl avvägt sammanställande ser man inte till. Av de fyra operationerna (addition, subtraktion, multiplikation och division) ha fpna visserligen oftast valt en av de rimligaste, men de ha inte varit mäktiga att tränga in i problemet, vilket erfordras för att få ett riktigt resultat. Översättningen av »dubbelt» till matematiskt språk, har ju ej krävt någon eftertanke, men vad

som skulle tagas två gånger, ha fpna ej förmått eller brytt sig om att analysera och syntetisera fram.

Men också de omedvetna momenten få plats inom analysen och syntesen. Det är tydligt att en analys och syntes verkligen måste äga rum, innan lösningssättet, helt eller delvis, så där plötsligt stått klart för fpn. Visserligen har fpn ej kännedom om hur det i detalj gått till eller kan redogöra härför — det hela har ju skett omedvetet —, men en sådan process har i alla fall ägt rum. Fpn har haft förmågan att i ett drag analysera och syntetisera, förmåga att samtidigt ta ut och rätt sammanställa de behövliga delarna i ett problem. Ett sådant överskådande av det hela kan ske något olika. Det kan exempelvis dröja länge, innan det mer eller mindre omedvetna analyserings- och syntetiseringsarbetet ger resultat i den meningen, att lösningssättet står klart. Vidare kunna ibland större, ibland mindre partier av räknearbetet ske medvetet. Problemet kan t. o. m. bitvis vara rätt minutiöst sönderplockat och sammanställt. Men så har fpns momentana sammangripande och överskådande mera i stort tydligt gjort sig gällande. Denna analys och syntes är av *intuitiv* karaktär.

Sådan karaktär har några fpnrs räknearbete haft beträffande den nyss anförda uppgiften om de två lika stora kärlen, varur avtappningar gjordes. Då problemet åskådliggjorts på sätt, som synes å sid. 120, har lösningssättet eller resultatet med ens stått klart. Skulle fpn så redogöra för, hur hon kommit därhän, ha svårigheter ofta yppat sig; åtminstone har det tagit avsevärd tid att utplocka och sammanställa alla de behövliga detaljerna. Naturligtvis har ett sådant sammangripande överskådande kunnat ske även utan åskådliggörande.

Räknearbetet består således överallt och alltigenom av samma sak: de med varandra oupplösligt förenade analyserna och synteserna. Men denna analys och syntes kan under olika förhållanden vara olika beskaffad. Den kan ha associativ, logisk och intuitiv karaktär. Associativ är den, då den räknande exempelvis plockar ut och sammanställer siffrorna i problemet utan att närmare göra klart för sig, i vilket förhållande de stå till varanda, eller då en regel tillämpas, utan att räknaren har förmåga eller gör sig besvär med att sätta sig in i problemet,

eller då ett problem tages precis på samma sätt som ett förut genomgånget, därför att en viss likhet förefinnes. Det hela blir mera »beröringsassociationsartat», man tar mera minnet till hjälp är begripandet. Den logiska analysen karakteriseras av att räknaren minutiöst går igenom problemet i en viss ordning; den ena delen skärskådas efter den andra metodiskt; den räknande fäller omdömen, drar slutledningar och söker begripa, men det hela går successivt. Sker uppfattandet mera i stort, om förmåga att åskådligt sammangripa och sammanhålla många detaljer, stora partier förefinnes (mycket måste då gå omedvetet), kan man tala om intuitiv analys och syntes.

Nu är det icke så, att det ena slaget helt utesluter det andra. Men det händer ofta, att det ena är mer *förhärskande* än det andra. Att den associativa analysen och syntesen är dominerande, då fpn angriper ett problem på måfå, exempelvis plockar ut siffror ur uppgiften och gör kritiklösa sammanställningar, torde vara visst. Sker däremot en grundlig och följdriktig analys och därmed sammanhängande syntes, har man skäl att antaga, att den logiska analysen och syntesen är förhärskande. Förekomma omedvetna moment i större utsträckning, vilka föra till en riktig och kanske fin lösning av proplemet, är det ej omöjligt, att den intuitiva analysen och syntesen dominerar.

Det torde ha sitt intresse att ställa de resultat, som erhållits vid dessa undersökningar, i belysning av dessa förhållanden. Av sammanställningen i tabell 25 finna vi, att inte mindre än 6 fpnr i fråga om åskådlighet betecknats med å och beträffande analyseringssätt med a. Kombinationerna å—m_2 och m_1—a, som stå å—a mycket nära, ha 4 och 1 utövare resp. De, som i berörda avseende inta en mellanställning och även stå tämligen nära (m_1—m_2), äro 5. De svagt åskådliggörande och analyserande (e—s) äro också 5. De denna kombination närstående e—m_2 och m_1—s representeras vardera av 2 fpnr. Hos ej mindre än 25 fpnr har således graden av åskådliggörande och analysering varit tämligen lika. Detta är också naturligt. Som förut påpekats, är ju åskådliggörandet ett slags analys och syntes, närmast av logisk karaktär. De grundligt analyserande ha också mest använt sig av logisk analys och

syntes. Det är därför ej underligt, att så många fpnr på samma gång visat sig vara starkt åskådliggörande och analyserande. På samma sätt förhåller det sig med andra motsvarande grader; de, som inte använt sig av det ena i större utsträckning, ha i regel ej heller i högre grad förfarit enligt det andra.

Emellertid, finnas några undantag. Kombinationerna e—a och å—s räkna 2 och 1 utövare resp. Av dessa ha de två till den första kombinationen hörande resonemangsvis analyserat tämligen grundligt men sällan åskådliggjort på förut angivet sätt. Dessa fpnr ha låtit sig nöja med att analysera i ord och ej haft förmåga eller behov av att tillgripa bilder. Fpn, som i förevarande fall erhållit beteckningen å—s, har, där så gått för sig, oftast med små enkla teckningar åskådliggjort behövliga delar av problemet. Någon annan analys och syntes har ej behövts, ty lösningssättet har ofta med ens stått klart. Denna fpn har i regel kommit med de finaste lösningarna.

Vad de omedvetna momenten beträffar, så synas dessa mest ha hört ihop med svagare analys, d. v. s. hithörande fpnr ha i mindre utsträckning än de andra använt sig av logisk analys och syntes. Ehuru, som förut anförts, de fpnr, som mer än andra angripit problemen på måfå, kommit att höra till m_3, så är det ej uteslutet, att en del moment, som räknats som omedvetna, haft karaktär av ett sådant angripande på måfå eller associativ analys och syntes. Härav förklaras, att de fpnr, som betecknats med o, ej fått bättre räkneresultat, än de fått. Nu kunna de omedvetna momenten också ha olika värde; tagna i den betydelsen, att de alltid skulle vara lika med intuitiv analys och syntes, torde ingen ha fullt hållit måttet. Närmast härvidlag har fpn 8 kommit. Hos de andra har det ej alls varit så utpräglat.

Den intuitiva analysen och syntesen är naturligtvis den värdefullaste. Därför borde hithörande fpnr ha erhållit det bästa räkneresultatet. Detta har också i regel varit fallet i fråga om de för lösningarna använda tiderna, men rättprocenten har av förenämnda skäl ej blivit så hög, som man kunnat vänta.

Näst i ordningen beträffande värdet kommer den logiska analysen och syntesen. De fpnr, som använt sig härav, ha, som framgår av tabellerna, lyckats bäst. Lägst på skalan kom-

mer den associativa analysen och syntesen. Att de fpnr, vilkas räknearbete karakteriserats härav, lyckats sämst, är ju naturligt. Emellertid må åter framhållas, att den ena eller den andra fasen inte enbart förekommit; samtliga ha naturligtvis i mer eller mindre mån alltid varit tillfinnandes eller övergått i varandra. Men den ena eller andra fasen har kunnat vara förhärskande.

Som framgår av det föregående, har hos fpna under undersökningarnas gång en glidning ägt rum från angripande på måfå till grundligt åskådliggörande och analyserande samt därifrån till större överskådlighet. Denna utveckling är ju också naturlig. Från associativ analys och syntes ha de övergått till logisk och så till sist hän mot intuitiv.

Att den intuitiva analysen och syntesen förekommit så sparsamt, torde ha berott på att utpräglade anlag för och tillräcklig mogenhet i ämnet saknades bland fpna. För att få undersökningsmaterial härvidlag anställdes särskilda försök med i ämnet mera försigkomna personer. Av dessa utvaldes en med tydligt intuitivt arbetssätt och en, som logiskt och grundligt genomanalyserade och syntetiserade de förelagda problemen. Denna sista (fpn A.) kan sägas ha arbetat diskursivt, den förra (fpn D.) intuitivt. Bägge fpna ägde goda kunskaper i matematik å det område, som behandlas för mogenhetsexamen (reallinjen). Dessutom hade bägge förut deltagit i psykologiska undersökningar, ehuru av en något annorlunda beskaffenhet, än vad som nu var före. Fpna förelades dels de här förut behandlade tio uppgifterna, som delgåvos fpna 1—28, dels andra av svårare art. De hade att avgiva utsagor på vanligt sätt, eller också fingo de räkna högt, varunder jag nedtecknade, vad de sade.

Somliga av de nämnda tio uppgifterna föreföllo nog dessa fpnr väl enkla och lätta, men i fråga om andra kom ett verkligt räknearbete till stånd. Här nedan några utsagor angående dessa problem:

A_2 »— — — men har efter den något hastiga genomläsningen ej klart för mig, huru problemet skall lösas. Börjar så läsa om från början men får där ingen utgångspunkt, varför jag läser vidare. Stannar vid 'köpte ytterligare 24 kulor' och fäste

detta i minnet. Läser så vidare och finner, att A. återvann de förlorade (dem kan jag ju kalla för x) samt 16 till. Hur många hade således A.? Jo, $x + 24 + 16$. Men A. hade vid slutet 57 kulor. Alltså är $x + 24 + 16 = 57$. $x = 57 - 24 - 16 = 17$. Nå, detta var ju lätt. Hade jag börjat i slutet, hade nog lösningen gått bättre. Men jag fann ingen utgångspunkt i början. Nå, hur många kulor hade då F. från början? Läser ånyo genom uppgiften. De kulor, som A. förlorade och sedan återvann, kunna lämnas ur räkningen. Men så förlorade F. 16 kulor till. Vid slutet hade han 20. Alltså från början $16 + 30 = 46$ — — —.»

D_2: »— — — Läser hastigt igenom uppgiften och finner, att jag bör räkna baklänges. F. hade 30 och A. 57. A. hade köpt 24, 16 voro nyvunna och resten $[57 - (24 + 16) = 17]$ återvunna av F. Läser sedan och ser efter, om jag gjort rätt. Jo. — Frans hade 30 kvar. Totalförlust 16. Hur många hade A. vid spelets början? 17 kommer utan vidare eftertanke. Han hade först förlorat alla sina kulor till F. Vann dem åter. De återvunna 17. Nu prövar jag: $57 + 30 = 87$ och $17 + 46 + 24 = 87$. Det går inte så där långsamt och ordentligt, som skrivningen visar. Fort och bara halvt uttänkt vid varje operation — — —.»

Vid genomläsandet av utsagorna finner man, att de båda fpna ingalunda gått tillväga på samma sätt. Hos A. märkes en strävan att i ordning från början plocka sönder problemet. — »Börjar läsa om från början, men får där ingen utgångspunkt — — —. Hade jag börjat i slutet av problemet, hade nog lösningen gått bättre. Men jag fann ingen utgångspunkt i början — — —.»

Annorlunda förhåller det sig med D. »— — — och finner, att jag bör räkna baklänges — — —.» Här har vägen stått klar från början; åtminstone har ej fpn strävat efter att gå i ordning från början. Under det att fpn A. t. o. m. gjort sig möda att plocka ut till en ekvation av uppgifterna om den ena spelande, synes fpn D. ha varit böjd för att ta uppgifterna om de spelande på en gång. Och ändå anmärker denna fpn, att »det inte går så där långsamt och ordentligt, som skrivningen visar».

A_9: »— — — Läste första meningen och stannar vid denna för att bearbeta innehållet. Läser så vidare genom hela uppgiften och fick en allmän uppfattning. Anser, att den är mycket enkel. Läser om igen från 'Tre minuter senare — — —'. Fäste mig vid siffrorna. Tänkte, att här får jag försöka teckna vattenmängden, som kommit till behållaren. Alltså 500 + + 17 . 8 . 9 + 17 . 8,5 . 8. Undrar, om det inte låg en fälla vid dessa 17 minuter för ösandet eller, rättare sagt, vid dessa '3 minuter senare'. Detta är alltså antalet l. vatten. - Men $\frac{\text{vattenmängden}}{\text{antalet minuter}}$ = mängden utkastat vatten pr min. Alltså — — —.»

D_9: »— — — Tycker mig från början ha klart för mig, att jag kan ta detta utan vidare resonemang. Skriver sedan under det jag läser:

500 l.
3 min. senare
8 — 9 ggr
$8\frac{1}{2}$ — 8 ggr.

Hur mycket i min.? Hur mycket fanns och östes? Så mycket rann ut under 20 min. Alltså:

$$\frac{500 + 8 . 9 . 17 + 8{,}5 . 8 . 17}{20} = x \qquad — — —.»$$

Även här har fpn A. analyserat tämligen grundligt, t. o. m. en smula ängsligt, i det att en fälla vädrades. Fpn har också här strävat att gå i ordning från början fram mot slutet och knappast gett sig tid att företa den vanliga första orienterande genomläsningen. Fpn D. däremot tar det hela »utan vidare resonemang». Ett överblickande av hela problemet har tydligen ägt rum från början; så några raska drag, och problemet var löst.

A_{10}: »— — — Läste igenom uppgiften och fann den vara av opraktisk art; inte får man sådana uppgifter i praktiska livet. Läser om igen från början men finner ingen utgångspunkt förrän längre fram i uppgiften. Markerar vikt och väglängd. Vilket är lättast av sädesslagen? Havren naturligtvis. Det frågas

efter vete, alltså antar jag, att 1 tunna vete väger x kg. Då väger 1 tunna råg $\frac{4x}{3}$ (rågen är väl ej tyngre än vetet?); 1 tunna havre $\frac{4x}{5}$. Vikten av hela partiet är $10x + 12 \cdot \frac{4x}{3} + 15 \cdot \frac{4x}{5} = 38x$ kg. 1 kg. kostar då för 6 mil $\frac{76}{38x}$ och för 1 mil $\frac{76}{38x \cdot 6} = \frac{1}{3x}$. Hur många tunnor vete då 10 mil för 50 kr.? Jo, 1 mil så många som $\frac{1}{3x}$ kan tas ur 50: $\frac{50}{\frac{1}{3x}}$ och 10 mil 10 gånger mindre antal: $\frac{50}{\frac{1}{3x} \cdot 10} = 15x$. Men då x var vikten på 1 tunna, så är 15 det antal tunnor, som kan forslas 10 mil för 50 kr. — — —.»

D_{10}: »— — — läser hastigt. Skriver sen upp det viktigaste. Det är fråga om vete. Följaktligen bör man tänka efter, hur mycket vete som kan fraktas 6 m. för 76 kr.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \text{ t. vete} \\ 12 \text{ » råg} \\ 15 \text{ » havre} \end{array}\right\} 6 \text{ mil; } 76 \text{ kr.}$$

4 t. vete = 3 t. råg = 5 t. havre. Dividera 12 med 3 och 15 med 5. $10 + \frac{12 \cdot 4}{3} + \frac{15 \cdot 4}{5}$; så mycket vete.

$\frac{76}{10 + 16 + 12 = 38} = \frac{2}{6}$ kr. pr t. 1 mil; $\frac{2 \cdot 10}{6}$ = priset för 10 mil.

$\frac{50}{\frac{2 \cdot 10}{6}} = \frac{50 \cdot 3}{10} = 15$. 15 tunnor — -- —.»

Omedelbart efter uträkningen avgavs angående lösandet av uppgiften följande:

»Ögnade snabbt igenom, vad det var fråga om men gjorde inga anteckningar därunder. Tog fasta på att det var fråga om vete. Alltså bör man förvandla till vete. Antecknade så som här ovan. Då jag kom till 4 t. v. = 3 t. r. = 5 t. h. och ville få fram jämförelsetalen, for som en pil tanken genom hjärnan, att 3 och 5 gå jämnt upp i 12 och 15 resp., vilket gör räkningen lättvindlig. Att jag skall dividera 12 med 3 och multiplicera med 4 för att få rågen uttryckt i vete, tänkte jag så hastigt, att jag knappt vet av att det tänktes. Det var snarare som en ingivelse; riktigheten brydde jag mig inte ens om att undersöka. Likaså med $\frac{15 \cdot 4}{5}$; såg dock instinktivt efter, om 4 verkligen hörde till jämförelsetalen. Räknar då samman eller, rättare sagt, tecknar spannmålen uttryckt i vete: $10 + \frac{12 \cdot 4}{3} + \frac{15 \cdot 4}{5}$. Tänker se'n på 6 mil och 76 kr. Hur många kr. kostar varje tunna i frakt 6 mil? $\frac{76}{10 + 16 + 12}$ (16 och 12 fick jag ur det föregående utan någon vidare räkning). Hur många kr. 1 mil? Dividerar föregående med 6 och får $\frac{2}{6}$ kr. Ser efter i exemplet och lägger märke till '10 mil' och '50 kr.' 1 t. kostar $\frac{2}{6}$ kr. 1 mil; $\frac{2 \cdot 10}{6}$ kr. för 10 mil. Hur många t. för 50 kr.? $\frac{50}{\frac{10}{3}} = 15$.

Nu är att märka, att tankearbetet stundom sker så blixtsnabbt, att det inte känns som tankar utan som någon slags ingivelse. Vet inte riktigt hur. Känner bara, att 'så skall det vara'. Men då och då träder tankearbetet i funktion för att t. ex. klargöra, om jag är på rätt väg.»

Även här märkes en strävan hos fpn A. att gå tämligen minutiöst tillväga. Denna uppgift har liksom de föregående naturligtvis varit lätt att lösa, fpn hade för övrigt något mera omfattande kunskaper och större träning än D. Men ändå har räknearbetet erhållit sådan karaktär.

Annorlunda har förhållandet varit i fråga om fpn D. I den omedelbart efter uträkningen avgivna relationen angående förloppet heter det, att »tankearbetet stundom sker så blixtsnabbt, att det inte känns som tankar utan som någon slags ingivelse». Fpn »vet inte riktigt hur. Känner bara, att så skall det vara.»

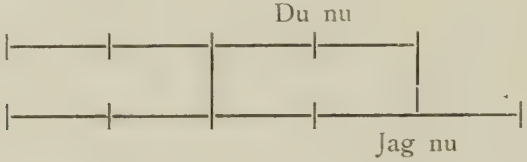
Några mera svårlösta problem delgåvos också. Ett förut omnämnt lydde: — En person sade till en annan: »Jag är nu dubbelt så gammal, som du var vid den tid, då jag var så gammal, som du nu är; och när du blir så gammal, som jag nu är, blir vår sammanlagda ålder 135 år.» Hur gamla voro de? (Givet i mogenhetsexamen, reallinjen, h. t. 88.) —

Fpnas utsagor angående denna uppgift:

Fpn A: »— — — tycker, att det är ett krångligt problem. Det var två personer. Den ena var äldre än den andra. Den äldre var dubbelt så gammal, som den yngre var vid den tid, då den äldre var så gammal, som den yngre är nu. Men detta kan jag ej få ut. Tar om igen. Den äldre var dubbelt så gammal som den yngre, men inte nu utan då den äldre var så gammal, som den yngre är nu. Nej, detta är ej riktigt. Den äldre *är nu* dubbelt så gammal, som den yngre *var*, då den äldre *var* så gammal, som den yngre *nu är*. Det här var svårt att hålla ihop. Det frågas efter, hur gamla de voro, d. v. s. efter deras *nuvarande* ålder. Kallar den äldres x och den yngres y. Den äldre *är nu* x år, och detta är 2 gånger så mycket som den yngres ålder vid den tid, då den äldre var så gammal, som den yngre *nu är*, d. v. s. y år. x är således $= 2$ gånger någonting, men vad? Nej, det här går inte! Får väl ta ett par tal till hjälp. Antag, att den äldre är 40 och den yngre 30 år! Då den äldre var 30, var den yngre 20. Det var 10 år tillbaka i tiden, d. v. s. skillnaden mellan 40 och 30. Sätter jag nu in x och y i stället, så erhålles $x - y$. Då var den yngres ålder $y - (x - y)$. Nu är den äldre 2 gånger så gammal som detta, d. v. s. $x = 2[y - (x - y)]$. Detta får jag pröva, om jag får ut ett rimligt svar. Så får jag gå vidare. — När du blir så gammal, som jag nu är, blir vår sammanlagda ålder 135 år. — Den yngre *ska bli* så gammal, som den äldre *nu är*. När äger detta rum? Tänker åter på 40 och 30.

Det blir om 10 år. Den äldre ökas med samma antal år, d. v. s. det blir $x + (x - y) = 2x - y$. Således skall $x + 2x - y$ vara lika med 135 — — —.»

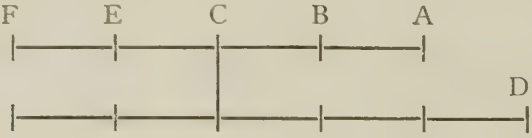
Fpn D.: »— — — Ser, att det är inkrånglat, varför jag ritar upp det.



Det blir 9 lika delar av deras sammanlagda ålder. $\frac{135}{9} = 15$. Således 15 år i varje bit. $3 \cdot 15 = 45$ och $4 \cdot 15 = 60$ — — —.»

Fpn A. har som vanligt gått ifrån början och analyserat grundligt. Men problemets natur är sådan, att en viss överskådlighet måste förefinnas, om man skall gå i land med det. Man kan här inte göra undan en sak i sänder utan måste samtidigt ha flera deluppgifter inte bara i blickfältet utan också i blickpunkten av medvetandet. Ett vanligt sätt att gå tillväga vid dylika svårigheter är att repetera gång på gång och markera viktigare delar särskilt. Fpn A. har också, som framgår av utsagan, tagit om och om igen. Men det hjälpte inte ändå. Först när åskådliggörandet med fingerade tal kom till, lyckades fpn att få en utgångspunkt och att hålla fast vid de nödiga detaljuppgifterna.

Fpn D. fann ävenledes problemet krångligt, varför ett åskådliggörande med linjer ägde rum. Men sen stod det hela klart. Problemet hade troligen helt eller delvis redan lösts under åskådliggörandet. I annat fall är det svårt att förklara, varifrån fpn fått de 9 delarna. Somliga delar av ålderslinjerna (den övre betecknar den yngres, den nedre den äldres; se teckningen här nedan!) kunna ju uppritas direkt med hjälp av uppgifterna



i problemet. Att A = den äldres ålder nu; B = den yngres ålder nu; D = den äldres ålder, då deras ålderssumma blev 135 år; A = den yngres ålder vid samma tillfälle; C = den yngres ålder vid den tid, då den äldres ålder var B, kan man få fram ur texten, likaså att delarna C—B, B—A och A—D äro lika stora. Men att få ut att E—C och E—F äro lika stora sinsemellan och med de föregående, torde knappast gå för sig utan att utföra en räkning, göra ett överslag av så gott som hela problemet. Vid förfrågan, huru dessa delar och deras antal erhållits, svarades, »att det stod klart för mig», »jag kände, att det måste vara så» o. s. v., vilket visar, att mycket härvidlag skett på ett omedvetet sätt.

Ett annat problem, som delgavs, lydde sålunda: — A. och B. arrendera tillsammans en beteshage för sommaren efter ett visst pris pr månad. A. har under hela tiden 4 hästar på bete, B. däremot under de första månaderna 2 hästar mer än under den sista; därför skall han ock under den första tiden ensam betala 20 kr. pr månad, under den senare blott 18 kr. Hur mycket betalade de tillsammans för hagen i månaden? (Givet i mogenhetsexamen, reallinjen, v. t. 00.) —

Fpn A.: »— — — sen jag läst igenom en gång, börjar jag om från början igen. De arrenderade tillsammans efter ett visst pris pr månad. De ge således en viss summa tillsammans, oavsett hur många hästar de hade. A. har alltjämt 4 hästar. B. har 2 mer i början än i slutet. I början har han 2 hästar mer än i slutet, han har 2 hästar mer då än sen. Han ska i början betala 20 kr. ensam pr månad. Sedan 18 kr. 20 kr. i början, så 2 kr. mindre. Det blir 2 kr. mindre för 2 hästar. Om han varit ensam som arrenderat, hade det gått lätt, men det var sant, de betalade ju en viss summa pr månad. Då blir det mera pr häst i slutet än i början. Det var bra att jag fick detta klart för mig. Det frågas efter, hur mycket de tillsammans betalade för hagen. Det var 2 hästar mer i början. Då betalade han 20 kr. Hur mycket blir det pr häst? Antalet av B:s hästar står det ingenting om. Kallar detta antal för x, d. v. s. det antal, han hade i början. Då blir det $x - 2$ i slutet. En häst kostar honom då i början $\frac{20}{x}$ och i slutet

$\frac{18}{x-2}$. Äro nu dessa pris lika? Nej, ty de måste ju betala mera pr häst i slutet. Då får jag försöka få en annan likhet. Priset pr månad skulle vara lika. Vad är då priset pr månad? En häst kostade i början $\frac{20}{x}$ kr. Nu hade A. 4 och B. x hästar. För dem blir det $(4+x)\frac{20}{x}$ kr. Under slutet var priset pr häst $\frac{18}{x-2}$ Nu hade A. 4 och B. $x-2$ hästar. För dessa blir det $(4+x-2)\frac{18}{x-2}$. Dessa månadspris måste vara lika. Alltså $(4+x)\frac{20}{x}=(4+x-2)\frac{18}{x-2}$ — — . .»

Fpn D.: »— — — läste jag igenom och fann därunder, att det inte kunde vara så många hästar, en 10—12 stycken. Det blir väl ett par tre kronor pr häst. Efter 3 kr. ska B. ha 6 hästar och A. får betala 12 kr., d. v. s. 30 kr. tillsammans. Om B. har 8 hästar, blir det 2,50 pr häst och A. får betala 10 kr. Det stämmer, de få betala 40 kr. för hagen. Men det här gillas nog inte, varför jag får sätta upp en ekvation — — —».

Olikheterna i fråga om dessa fpnrs arbetssätt framträda även här tydligt. Vi återfinna hos A. samma minutiösa och grundliga förfarande som förut. Fpn D. däremot har överblickat problemet och haft samtliga detaljuppgifter och deras förhållande till varandra så klara för sig, att ett riktigt resultat erhållits utan någon märkbar räkning. Mycket av detta överslag har naturligtvis varit av omedveten art.

Nu är det ju klart, att också fpn A:s räknearbete delvis består av omedvetna moment. Även där förefinnas obeaktade förberedelser, ehuru uppgifterna äro så grundligt sönderplockade. Men i arbetet att komma till dessa smådelresultat ha moment förekommit, som varit av omedveten karaktär. Detta framgår knappast av utsagorna. Mycket försiggår ju, som förefaller fpn självklart; han tänker inte på det, därför förekommer ingenting därom i utsagorna. Men genom utfrågning och akt-

givande på fpns höga räkning, varom förut talats, har kunnat fastslås, att inte så litet av omedveten art förefunnits.

Det dominerande i fpn A:s räknearbete är emellertid den logiska analysen och syntesen. Fpn har liksom haft behov av att formulera sitt tänkande. Just detta gör för övrigt, att tänkandet måste kompletteras. Mycket, som förefallit fpn oklart, har härigenom fått sin lösning. Härvid har fpn ofta (fpna A. och D. ha delgivits inalles ett 30-tal problem) i svårare fall använt sig av åskådliggöranden av olika slag. Härigenom som ock genom den grundliga analysen ha de svårare komplexen betonats, om möjligt uppdelats, isolerats och fixerats.

Någon minutiös uppdelning har ej förekommit hos fpn D. Här har större komplex kommit under behandling, och ändå märks knappast själva tankearbetet utan endast resultaten. Endast då resultatet ej hittats, har tänkandet blivit fullt medvetet. Då har ofta ett åskådliggörande fått belysa ett större komplex, varefter det hela oftast stått klart, d. v. s. hela komplexet har kunnat överblickas på en gång, och så har arbetet åter skett omedvetet, tills resultatet ernåtts. Här har således räknearbetet haft övervägande intuitiv karaktär.

Betecknande för fpn D. har varit, att ekvationer ej gärna använts. Inplockandet av detaljuppgifter i en ekvation har ej tilltalat. Däremot har fpn A., som det synes, ibland t. o. m. i onödan strävat efter att få upp en ekvation. Detta är lätt förklarligt. För en fpn, som haft förmåga och vana att överskåda det hela på en gång, har det inte varit något nöje att klavbindas av något sådant. Ekvationen, om någon sådan behövts, har ofta kommit efteråt, sedan problemet på annat sätt solverats. På så sätt har ofta mycket fina lösningar erhållits.

Som förut framhållits, har fpn A. haft något större kunskaper i matematik än fpn D. och även större träning i att lösa problem. Det är egendomligt, att denne fpn i så hög grad hängt fast vid det logiska arbetssättet, då ju en hel del borde ha varit mekaniserat och därför skulle ha framträtt som omedvetna moment. Emellertid måste fpn betecknas som en mycket god och i synnerhet en säker räknare, även om arbetet tagit tämligen lång tid.

Att fpn D. haft anlag för ämnet, har tydligt framgått av

det förut anförda. Anlag och begåvning ge ju sig för övrigt tillkänna genom det intuitiva arbetet. De för problemens lösning använda tiderna ha i allmänhet varit mycket fina, så ock lösningarna. Vid vanliga provräkningar, som företagits, har det dock visat sig, att denna fpn ej varit fullt så säker räknare som fpn A. Vanligtvis har det varit rena bagateller, varå fel gjorts.

Ehuru naturligtvis även i fråga om fpna A. och D. associativ, logisk och intuitiv analys och syntes förekommit om vartannat, är det dock tydligt, att den logiska varit förhärskande hos A. och den intuitiva hos D.

O. SELZ, vilken som bekant nedkritiserat konstellationsteorien och i stället fört fram sin komplexteori (Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs; tryckår 1913), talar beträffande lösning av problem om omedelbar och successiv »Wissensaktualisierung». De problem, S. delgav fpna, voro emellertid av helt annan art än de här behandlade. Det var i intet fall fråga om matematiska problem utan endast alldagliga, lätt besvarade frågor, t. ex. »Verkan? — Bett», »Ett samfärdsmedel» o. s. v., varvid fpna hade att söka finna, vilken verkan ett bett hade eller nämna ett samfärdsmedel etc. Ehuru undersökningsmaterialet var helt olikt mitt, förekomma i fråga om resultaten vissa likheter. Vad S. kallar omedelbar och successiv »Wissensaktualisierung» motsvarar i viss mån min uppdelning av analysen och syntesen.

För att göra klart vad han menar med »Wissensaktualisierung» torde följande ur hans arbete behöva anföras. »Das Bemerktsein eines selbstgegenwärtigen Sachverhältnisses pflegen wir nicht als 'Wissen', sondern als 'Erkenntnis' zu bezeichnen; denn wir verstehen unter Erkenntnis jedes neu erworbene Bewusstsein von einem Sachverhältnisses, das nicht durch blosse Mitteilung erworben ist. Dagegen verstehen wir unter einem 'Wissen' zunächt die dauernde Fähigkeit, des Bewusstsein von einem bestimmten Sachverhältnis (Sachverhaltsbewusstsein) zu reproduzieren. Das Bemerktsein eines selbstgegenwärtigen Sachverhältnisses bildet eine der Quellen eines solchen Wissens. Voraussetzung für das Zustandekommen eines Wissens durch das Bemerktsein eines Sachverhältnisses ist, dass

von diesem Bewusstseinszustand Gedächtnisdispositionen zurückbleiben. Wie nennen solche Gedächtnisdispositionen 'Wissensdispositionen' und demententsprechend das auf ihnen beruhende Wissen 'dispositionelles Wissen'. Durch die Wiedererregung der Wissensdisposition wird das Bewusstsein von dem Sachverhältnis reproduziert, also das dispositionelle Wissen aktualisiert. Die Aktualisierung von Wissensdispositionen bezeichnen wir als 'Wissensaktualisierung', das reproduzierte Sachverhaltsbewusstsein als 'aktuelles Wissen'. Hierbei ist es für den Begriff des aktuellen Wissens gleichgültig, ob die Reproduktion des Bewusstseins von einem Sachverhältnis von Vorstellungen von sich geht.»

S. sysslar som sagt ej alls med räkneuppgifter utan andra mycket »korta» problem. Vad han kallar successiv »Wissensaktualisierung» motsvarar emellertid i viss mån, vad jag här benämnt logisk analys och syntes. Vid exempelvis »död — sidoordning», visste fpna, att det gavs en lösning, kanske också redan i början åtskilligt angående denna lösning. Men den fullständiga aktualiseringen kommer först långt fram i processen. Här kommer lösningen som en successiv utveckling av ett komplex, som innehåller lösningen.

Ibland kunde emellertid — vid särskilt lätta problem i synnerhet — lösningen följa genom omedelbar »Wissensaktualisierung». Fpna reagerade helt mekaniskt; medvetandet om lösningen kom måhända först efteråt. Den riktiga lösningen kommer efter retningsordet utan några mellanupplevelser. »Det är så», »man sätter dem vanligen tillsammans» o. s. v. återkom i fpnas utsagor. Ju mera »geläufig» det hela går, ju mera träder »Wissensaktualisierung» tillbaka i medvetandet. Detta skulle kunna sägas på visst sätt motsvara, vad jag här kallat intuitiv analys och syntes.

Richard Müller-Freienfels (Das Denken und die Phantasie) talar om »untersprachliches» och »übersprachliches Denken». En typisk form för det första är, säger han, sökandet. Man får inte tvivla på att detta verkligen är ett tänkande. Det förekommer ju utväljande och förkastande. Inte heller saknas den karakteristiska aktivitetskänslan. Detta sökande är

den mest primitiva form av tänkandet och förekommer t. o. m. hos djur men påträffas också hos högt utvecklade människor.

Beträffande »übersprachliches Denken» skiljer M.-F. mellan »summariskt» eller »avkortat» tänkande och »überlogisches Denken». Vid det förra skulle tänkandet löpa före och liksom springa över i språklig formulering. I fråga om det senare skulle innehållet i tänkandet överhuvud ej kunna fattas i ord.

Vad M.-F. här kallar »untersprachliches Denken» motsvarar närmast, vad jag kallat associativ analys och syntes. Det avkortade tänkandet skulle motsvara den logiska och »überlogisches Denken» intuitiv analys och syntes.

Man kan, som förut framhållits, vid problemlösandet i allmänhet särskilja en *förperiod,* som räcker ungefär, tills man läst igenom problemet och börjar analyseringen därav, så en *huvudperiod,* varunder det egentliga lösningsarbetet sker, och till sist en *efterperiod,* som börjar, just då problemet är löst eller man kommit på så kända banor, att fortsättningen sker helt mekaniskt. Gränserna mellan de olika perioderna bli naturligtvis i mångt och mycket flytande.

I det föregående har den viktigaste av dessa perioder, huvudperioden, varunder det egentliga lösningsarbetet utförts, behandlats, och de individuella olikheterna härvidlag framhållits. Början och slutet av utsagorna, representerande ungefär för- och efterperioderna resp. ha förut ej medtagits. Även i fråga om dessa perioder av lösningsprocessen ha individuella olikheter kunnat konstateras. Analysen härvidlag är grundad på fpnas (särskilt fpna A och D) och egen introspektion.

Det torde emellertid vara nödvändigt att förutskicka några ord angående det allmänna förloppet, innan vi ingå på nämnda olikheter. Vi anta, att problemet delgives optiskt, och att det är ett normalfall, d. v. s. att den räknande på förhand vet, att ett matematiskt problem skall delgivas till lösning, och att uppgiften ej är allt för lätt eller allt för svår. Problemet får ej vara så lätt, att det hela går helt mekaniskt, men den räknande skall äga nödiga förutsättningar för att kunna lösa detsamma. Vidare antages, att den räknande efter åtskilligt arbete lyckas lösa den förelagda uppgiften på rimlig tid.

Vi skola nu först anföra några utsagofragment angående förperioden.

Fpn A.: »Väntar, att det ska komma ett svårt problem. Känner mig ej i humör att räkna i dag, åtminstone inte arbetssamma uppgifter. Men jag får väl försöka göra så gott jag kan. Nu kommer uppgiften. Är den svår? Läser igenom — — —.»

Fpn D.: »Nu ska jag räkna ut uppgiften fort. Om jag ändå finge den? Är det ett svårt problem? En massa uppgifter far genom huvut på mig. Måtte det inte bli så mycket sifferräkning! Det är så tråkigt. Det blir väl ändå ett sånt. Är i spänning, när jag får uppgiften. Ögnar i en hast över det hela och läser så igenom — — —.»

Fpn 1: »I dag går det kanske bättre att räkna än sist. Det vore väl märkvärdigt, om jag inte skulle kunna räkna rätt. Kanske vi få ett hastighetsproblem? Vägen är lika med hastigheten gånger tiden. Nu kommer det. Läser igenom och finner, att det ej alls är något hastighetsproblem — — —.»

Som vi se, äger under förperioden en *inställning* rum. Fpna ha samlat sig för uppgiften; de ha varit i väntan på vad som skulle komma; de ha känt sig mer eller mindre säkra eller osäkra, en viss nyfikenhet har gjort sig gällande; de ha kunnat känna det pinsamt, om delgivandet dröjt men också en viss fruktan för att det skulle komma för snart; de ha — ibland mera omedvetet — haft en strävan, en föresats att försöka lösa problemet samt att lösa det fort och bra; de ha ibland dragit fram formler o. d. i medvetandet; de ha funnit sig mer eller mindre disponerade o. s. v. Det rör sig tydligen mest om känslo- och viljemoment.

Så kommer delgivandet. Under det att, som vanligen har skett, fpna helt hastigt ögnat igenom uppgiften, har väntan upplösts i tillfredsställelse eller besvikelse, allt eftersom fpna funnit problemen lätta eller svåra, trevliga eller tråkiga, allt eftersom (vid specialinställning) problemets natur motsvarat eller icke motsvarat det, de inställt sig på eller anpassat sig för. Det har kanske kommit någonting väntat eller oväntat, konstigt, gåtfullt, mer eller mindre främmande, bekant, dunkelt, klart, svårt att förstå sig på o. s. v. Fpna ha gjort ansatser eller

föresatser att räkna ut uppgiften fort; de ha funnit det svårt att börja o. s. v.

Känslo- och viljemomenten äro, som synes, fortfarande starkt representerade. Fpna ha försatt sig i uppfattningsläge, samlat energi, som tills vidare förblivit potentiell. Att intresset och uppmärksamheten varit med, är givet. Inställningen har dock kunnat ske olika livligt hos olika räknare. I klassen (genom suggestiv inverkan lärjungarna emellan) har intensiteten härvidlag kunnat drivas till en oerhörd höjd.

Beträffande dessa fpnr har kunnat påvisas dels en allmän inställning, dels en speciell. Så har, ehuru sällan, hänt, att fpna vid inställningen väntat sig en viss kategori problem och därvid inställt sig så livligt, att de utan vidare behandlat den efteråt delgivna snarlika uppgiften på sätt, som de under inställningen specialiserat sig på. Då vid vanliga provräkningar ett större antal problem delgivits samtidigt, har ofta det räknats först, varpå fpna närmast varit inställda, det som mest liknat det väntade.

Då problemet delgivits, ha fpna vanligen hastigt ögnat eller läst igenom detsamma samt intagit en viss ståndpunkt. Detta framgår redan av det anförda, men ytterligare några utsagor må anföras för att belysa detta förhållande.

26_6: »Som vanligt känner jag mig inte riktigt väl till mods, fastän jag vet, att det ej gäller några betyg. Men jag brukar ha otur, tycker jag själv, förstås! Det blir väl någonting svårt. I dag ska jag emellertid försöka räkna bra. Det blir kanske ett procenttal. (Efter delgivandet.) Ögnar igenom början och ser, att det är fråga om en cylindrisk bägare, det är väl en geometrisk uppgift. Ser vidare igenom talet. Den ska förgyllas. Man vill ha reda på bägarens inre mått. Det är ett geometriskt exempel. Detta bör jag nog gå i land med — — —».

A_6: »Jag bör väl kunna räkna rätt i dag, fastän jag ibland inte tycks kunna hålla ihop tankarna. Ska ta det sakta och säkert. (Efter delgivandet.) Läser igenom uppgiften. Finner, att det är ett geometriskt problem, där det gäller att få reda på bottenytan och manteln — — —».

D_6: »Har ej någon särskild lust att räkna i dag. Emel-

lertid ska jag ta det snabbt. Nu får jag det. Jaså, det var ett sådant problem. Detta löser jag med detsamma — — —».

De räknande ha, som framgår av utsagorna, intagit en viss ståndpunkt i förhållande till problemet. Redan härunder har lösningsarbetet i viss mån börjat, varför detta ställningstagande kan sägas vara en övergång mellan för- och huvudperioden. Under det att inställningen förut helt haft subjektiv karaktär, kommer nu ett objektivt moment till, nämligen det delgivna problemet. Den potentiella energien får hastigt eller så småningom sin avledning eller transformering.

Fpna ha sökt göra sig bekanta med problemet, har sökt inringa det, ge det en plats inom ett visst område. Ett slags växelverkan, kan man säga, har ägt rum mellan de räknande och problemet. Det har därunder blivit tydligare och klarare; de räknande ha inriktats på ett visst sätt.

Redan från början har problemet bearbetats. Ett jämförande har ägt rum, ofta blixtsnabbt eller omedvetet. »Uppgiften är lätt», »svår», »det är en geometrisk uppgift», »ett hastighetsproblem» o. s. v. heter det i utsagorna, men hur fpna kommit därhän, ha de ofta ej vetat mycket om.

Ju lättare ett problem förefallit, ju hastigare och mera omedvetet har detta ställningstagande skett. Som synes av utsagorna, är det en oerhörd skillnad mellan hithörande processer hos fpna 26 och D. För den senare fpn har problemet varit allt för lätt. Detta skulle också gälla fpn A., men som denna ej ägt samma rörliga intellekt som D., har det dröjt relativt länge att inta ståndpunkt.

Av allt att döma har ställningstagandet ofta tagit en avsevärd tid i anspråk beträffande svaga räknare. Tankearbetet har stått så gott som stilla, på sin höjd har ett väntansfullt sökande förefunnits. En känsla av att det varit någonting okänt och svårt samt hopp om att en ljusning skulle inträda har kanske förekommit men på en god stund ingenting därutöver.

Det fortsatta ställningstagandet hör närmare samman med huvudperioden. Under denna period sker det egentliga räknearbetet, d. v. s. analyserings- och syntetiseringsarbet. Därom har i det föregående så myckets talats, att det i detta sammanhang torde vara tillräckligt med några korta erinringar.

De fpnr, vars räknearbete karakteriserats av associativ analys och syntes, ha under ställningstagandet och bearbetningen av problemet inte förhållit sig på alldeles samma sätt. Hos mera nonchalanta räknare har ställningstagandet gått tämligen raskt; problemen ha mera okritiskt hänförts till en viss kategori. Därvid ha de ibland kommit fel. Eller också ha fpna egentligen endast tagit ställning till de förekommande sifferuppgifterna. Under sådana förhållanden har det naturligtvis inte kunnat bli någon intensiv analys och syntes; räknearbetet har i stället fått karaktär av ett angripande på måfå. En utsaga härom:

14_6: »— — — finner att det är ett procenttal. Det ska jag nog lösa, ty talet ser lätt ut. Det är bara att ta 20 från 30: det blir 10. Så tar jag 10 % av 11,05, så har jag svaret — — —».

Det är dock inte alltid nonchalansen, som gör, att arbetet får karaktär av angripande på måfå. Mycket svaga räknare ha kunnat nog så intensivt (efter måttet av krafter) bearbeta problemet, men ändå har det inte blivit någon ordentlig analys och syntes. En utsaga härom:

7_2: »— — — Det här talet ser så svårt ut. Jag vet ej, hur jag ska bära mig åt. Det är så mycket att hålla reda på. Jag kan inte hitta någon utväg. Man ska ta reda på hur många kulor de hade i början. Jag får väl ta 16 ifrån 24 — — —».

Ställningstagandet har här fått sin särskilda karaktär. »Man vet ej, hur man ska ställa sig», som en fpn uttryckt sig. Men även detta är ju att ta ståndpunkt. Olust och deprimering ha i sådana fall vanligen gjort sig gällande.

Hos de fpnr, som mer än andra använt sig av logisk analys och syntes, ha, sedan det första ställningstagandet ägt rum, inte så många känslomoment kommit till synes, även om de naturligtvis då och då förekommit. »Det var bra, att jag fick detta klart för mig», »nu har jag lyckats reda upp det» o. s. v., heter det i utsagorna. Men det logiska jämte ett lugnt och fast strävande att arbeta sig igenom synes ha dominerat. Hela ställningstagandet har för övrigt skett mera långsamt och lugnt. Fpna ha gett sig till tåls, även om i början intet lösningssätt kunnat skönjas. De synas många gånger ej ha brytt sig om

att försöka överblicka uppgiften från början, saken har tagits med ro, och problemet har analyserats bit för bit, vanligen i en viss ordning, från början av problemet och framåt. Dessa fpnr ha gått mycket grundligt tillväga, man tycker, att onödiga detaljer många gånger framdragits, som skulle ha åstadkommit onödigt arbete och t. o. m. verkat förvillande. Det är också visst, att den tid, som använts för problemens lösning, blivit relativt lång, men säkerheten torde ej ha lidit härav, enär de oviktiga delarna efter bearbetningen, sedan de visat sig oanvändbara, slungats bort. Dessa fpnr ha haft lätt att smula sönder i delproblem samt ha haft förmåga eller känt sig tvingade att i detalj formulera sitt tänkande. Många exempel på till denna kategori hörande fpnrs räknearbete ha anförts i det föregående. Särskilt fpn A. har visat sig vara en typisk representant för denna riktning.

Fpn D. har tillhört en annan typ. Som vi erinra oss, har den intuitiva analysen och syntesen mest kommit till synes hos denna fpn. Ställningstagandet har skett snabbt, men ändå har därunder en strävan att överblicka och behärska det hela, att så hastigt som möjligt slå under sig och övervinna problemet gjort sig gällande. Vid räkning som vid allt annat arbete är det ju fråga om att övervinna ett motstånd. Hos denna fpn som ock hos andra, som arbetat på liknande sätt, har ofta förekommit stor rörlighet och mycket har, som fpn uttryckt sig, tagits på känn. Hithörande fpnr ha, synes det, så fort som möjligt sökt fullborda ställningstagandet men också på samma gång att i ett drag övervinna det motstånd, som representeras av problemet. Härunder ha fpna ofta befunnit sig i stark spänning; en stark verksamhetskänsla har förefunnits. Härvid ha fpna ej haft tid, lust eller behov att formulera tänkandet i ord.

Mot slutet av undersökningarna förelades fpn D. några uppgifter, varvid fpn uppmanades att genomgå problemet bit för bit. Fpn var väl inne i det, som åsyftades, och föresatte sig att »ta det så grundligt som fpn A.». Föresatserna slungades emellertid snart bort under bearbetandet, och lösningssättet blev snart det karakteristiska. Det synes ha varit något speciellt normgivande i hela psyket, som givit upphov till arbetssättet. Att känslo- och viljemomenten varit starkt represen-

terade härvidlag, har bl. a. framgått av att fpnr tillhörande denna riktning »inte kunnat ge sig till tåls», som de uttryckt sig, förrän de kommit ut med det hela.

Ett liknande förhållande har beträffande dessa fpnr gjort sig gällande vid författandet av föredrag och uppsatser samt vid läsning av böcker. Det har förmärkts en tydlig strävan att så hastigt som möjligt överblicka och behärska det hela. Hos fpn A. och andra till samma riktning hörande har å andra sidan iakttagits en strävan att gå i ordning, att ordentligt göra undan från början. Om, som det synes, fpna haft sådana olikheter i fråga om läggning, är det inte underligt, att det säregna kommit till synes även vid problemlösningen. De ha valt det sätt, som bäst passat dem, där minsta motståndet mött. Detta har emellertid inte hindrat, att en viss glidning ägt rum jämsides med undergången träning och utveckling.

Naturligtvis ha inte alla fpnr avgjort kunnat hänföras till den ena eller andra av dessa huvudriktningar. Mellanformer ha givetvis förekommit. Gemensamt för alla har varit, att fpna, så att säga, velat stryka under eller betona vissa delar av problemet (om också ibland mera omedvetet), sökt lösa ut dem ur hela komplexet. Uppmärksamheten har kraftigt riktats på dem, fpna ha »velat göra någonting» med de uppmärksammade delarna. Uppmärksamheten har inriktats på sådana (i subjektiv mening) viktiga »kardinalpunkter». Här har arbetet mera haft karaktär av analys.

För att komma till dessa kardinalpunkter eller för att få dem mera klart belysta har nog redan härunder en mer eller mindre omfattande syntes företagits. Men sedan behövliga delar framtagits, har den syntes vidtagits, som mera direkt lett till problemets lösning. Har problemet varit av typisk art och typen för den räknande bekant, har det rätt tidigt hänförts till sin bestämda kategori. Härigenom har analysen och syntesen blivit säkert styrd i en viss riktning. Mycket har då gått mera mekaniskt eller omedvetet. Fpna ha för övrigt även i andra fall sökt sammanfatta till någon slags enhet, till mera typiska och bekanta uttryck, som antingen direkt eller efter ytterligare bearbetning efter bekanta mönster och efter kända vägar givit svaret på den i problemet uppställda frågan. Problemet har blivit löst.

Sedan det egentliga lösningsarbetet är slut, börjar efterperioden. Några utsagor härom:

Fpn A: »— — — Det här är säkert rätt räknat. Tror ej, att jag behöver kontrollera, ty det var ett jämförelsevis lätt exempel. Svaret är ju också rimligt. Jag överlämnar det, som det befinns.»

Fpn D.: »— — — Känner på mig, att det måste vara riktigt. Bra, att det gick så fort, inte var det några krångliga räkningar heller. Bäst emellertid att göra ett överslag — — — Jo, det är allt rätt.»

26₇: »— — —. Talet var inte alldeles så lätt. Är ej säker på om det är rätt. Alltid kan det vara någonting, som jag sett förbi. Får försöka räkna om talet — — —. Jag fick samma resultat, så det kanske ändå är rätt.»

Sedan uträkningen skett, ha fpna i regel givit sitt omdöme angående problemets svårighetsgrad, art o. s. v. Detta har nu kunnat göras mera säkert än under förperioden (eller vid pauser under huvudperioden), då motsvarande omdömen varit mera trevande. Vidare ha fpna känt sig (även här således känslomoment) mer eller mindre säkra på att problemet blivit riktigt löst. I förra fallet har en känsla av tillfredsställelse inställt sig över att de lyckats i sin strävan, att de övervunnit motståndet, »Riktighetskänslan», känslan av att »störningen» mellan den räknande och problemet har blivit upphävd, har ingett en viss tillförsikt. Problemet har nu blivit bekant, fpna ha kommit »överens» med den ifrågavarande uppgiften.

Här har naturligtvis den subjektiva uppfattningen varit avgörande. En dylik känsla har naturligtvis kunnat vara tillfinnandes, även om problemet i själva verket varit oriktigt löst; det har endast erfordrats, att den räknande själv varit övertygad om att det erhållna svaret varit riktigt.

Emellertid har den föregående erfarenheten visat, att man inte bör vara för säker i detta avseende, varför denna tillfredsställelse i mer eller mindre grad kunnat vara blandad med tvivel angående riktigheten. Så hos fpn 26 enligt den anförda utsagan. Fpna ha i sådana fall gått igenom problemet ånyo. Efterperioden har så övergått i en ny måhända något olikartad

förperiod, varpå en huvudperiod samt till sist ytterligare också en efterperiod följt.

En sådan kontroll har i synnerhet förekommit, om fpna funnit problemet svårt. Men även hos fpnr, i vars utsagor man påträffat omedvetna moment i större utsträckning, har förekommit dylik kontroll, ehuru den ofta mera haft karaktär av överslag. Om nu detta skett därför, att dessa fpnr haft en förnimmelse av att analyseringen varit allt för knapphändig eller hastig, eller om de hellre genom insättning eller så av det funna svaret i ekvationer eller sammanställningar velat på så sätt vid prövning av uppgiften bearbeta problemet, därför att ett sådant förfarande varit av mera syntetisk karaktär, är ju svårt att avgöra.

Några av dessa fpnr ha också haft svårt att avgiva utsagorna, under det att det egentliga lösandet pågått. Så har fpn D. helst velat avgiva utsagan, sedan problemet blivit löst. Detta torde mest ha berott på att strävandet att så fort som möjligt kunna överblicka och behärska problemet varit så starkt. Bidragande orsak kunde dock också ha varit vanan att efter lösandet med mera lugn gå igenom och kontrollera, vad som förut i stor hast åstadkommits. Emellertid må också framhållas, att inte alla till denna riktning hörande fpnr alltid företagit en sådan kontrollering.

Vad som här ovan sagts rörande frågan, hur problemlösandet går till, är naturligtvis icke ett fullödigt uttryck för vad som sker. Det må påpekas, att beskrivandet härvidlag aldrig kan ge en fullt klar bild. Resultatet av tänkandet, det som så att säga utkristalliserats, kan man ju jämförelsevis lätt forma eller omforma i ord, men hur man kommit till detta resultat, hur denna utkristallisering ägt rum, därför är svårare att finna uttryckssätt. Så kommer härtill, att ibland endast »stora» resultat (det hela sker omedvetet), bakom vilka man tycker borde finnas »långa» tankar, komma till synes, vilket gör det hela ännu vanskligare. Vidare kunna känslo- och viljemoment, som tydligen spela stor roll, omöjligen i ord få ett adekvat uttryck.

Man kanske skulle kunna tycka, att en introspektion av en fpn med omfattande kunskaper i såväl matematik som psykologi skulle vara mest givande härvidlag. Häremot må invändas, att

då tankearbetet hos en mera tränad matematiker i stor utsträckning sker omedvetet, många detaljer skulle helt utebli, och därmed skulle utsagorna så till vida ha mycket mindre värde än redogörelserna av på lägre stadium stående fpnr. Det är av de mindre skolade och otränade man får fram de friskaste detaljerna. I det föregående har påpekats, hur den relativt högt stående fpn D. angivit, att utsagorna ej varit ett adekvat uttryck för vad som förekommit. »Det går inte så långsamt och detaljerat till», »det är omöjligt att beskriva hur det gått till, då så mycket sker blixtsnabbt» o. s. v. ha varit stående tillägg till utsagorna. Här blir det vid försök att nedskriva, vad som upplevats, lätt förkonstling, även om vederbörande bemödar sig om motsatsen.

Emellertid har jag själv företagit en introspektion rörande räknandet av såväl här förut avhandlade exempel som andra av svårare art. Orsakerna till att ej en fullständig redogörelse härför medtagits, äro dels de här förut nämnda, dels att de i dessa undersökningar deltagande synas faktiskt ha fått med det väsentliga. Naturligtvis har den egna introspektionen för kontrolls och jämförelses skull ändock haft sitt stora värde för utarbetandet av denna framställning.

MÜLLER-FREIENFELS (Das Denken und die Phantasie, tryckår 1916) uppdelar även han problembehandlingen (det är härvidlag inte alls fråga om matematiska problem; han framställer en teori, byggd på introspektion, angående tänkandet, varvid huvudvikten lägges vid det konstruerande) i tre huvudmoment, nämligen »die Problemsetzung», »die Konstituierung und Bearbeitung des Problems» samt »die Lösung des Problems». Denna indelning motsvar rätt väl, vad jag har kallat för-, huvud- och efterperiod. Visserligen hänför M.-F. själva lösandet av problemet till sista momentet, men han säger själv, att lösningsakten gärna kunnat hänföras till det föregående, nämligen till konstituerandet och bearbetandet.

I fråga om det första momentet, »die Problemsetzung», säger han, att själva »stöten» inte i och för sig erhålles av det objektivt givna, utan alla objektiva problem måste först utlösa subjektiva reaktioner, känsla, innan tänkandet kommer till stånd. Det är detta, som sätter tänkandet i gång och anger

riktningen. Det måste alltid börjas med någonting icke intellektuellt. Man stöter på någonting »motsägande», »tvivelaktigt» o. s. v. Alltjämt är känslan med; det blir ett slags ställningstagande.

Dessutom tillkomma vid problemställandet, enligt M.-F., utpräglade viljemoment. Omdömen, språket, äro, säger han, »Tätigkeiten». Man märker ofta osäkerhet och oklarhet, då man skall omsätta tankarna i verksamhet. Men det blir först genom »görandet» fullt klart.

Detta problemställande, d. v. s. denna känslobetonade inställning av tänkandet, är medelpunkten för vidare operationer och utgångspunkt för allt tänkande. Detta är viktigare än allt annat, viktigare t. o. m. än besvarandet, lösandet av problemen. Det är frågornas, idéernas uppställande, som kännetecknar geniet.

Enligt M.-F. utgöres det andra huvudmomentet vid problemlösandet av »die Konstituierung und Bearbeitung des Problems». Inte alla »Denkanstoss» konstituera sig som problem. Somliga lösas raskt, utan vidare, andra däremot bli olösta. Det fordras en stark känsla att kunna kvarhålla ett problem som sådant i själen. Den fullt »känslolösa» tänkaren är en konstruktion. Visserligen kan det förefalla »känslolöst», då den tänkande koncentrerar sina känslor på sitt problem, d. v. s. han har ej känsla för någonting annat. Det är förbiseendet härvidlag — då enstaka känslor ej förefinnas, sluter man därav, att det hela är »känslolöst» — som vållat missuppfattningen i fråga om tankeprocessen. Visserligen bibehåller inte alltid den inställande känslan sin fulla kraft. Vi veta, att många skapande andar med största anspänning av sin energi tvingat sig kvar eller tillbaka till sina problem. Det karakteristiska för genierna är ofta, att — i motsats till medelmåttorna — de varit mäktiga en sådan koncentration. Härvid fordras, som klart är, en järnvilja, som för övrigt är skadlig, endast då den tendentiöst påverkar lösningen i sakligt hänseende.

M.-F. räknar själva lösningsmomentet till det sista avsnittet i tänkandet (Die Lösung des Problems). Men han säger, som förut påpekats, att det gott kunde hänföras till det föregående

(Die Konstituierung und Bearbeitung des Problems). I fråga om lösandet måste man skilja mellan själva lösandet och känslan, det medvetande, som följer med detta lösande, som karakteriserar förloppet. Man har en känsla av »evidens», »säkerhet», »tillfredsställelse» o. s. v. Själva akten är inte klart medveten. Lösningen har kommit i ett slag, man vet ej huru. Någonting har utkristalliserats ur de många möjligheterna, ur tankarnas kaos. Det är ej längre någonting hämmande, som möter. I denna negativa mening karakteriseras lösningsakten bäst. Härvidlag äro motoriska moment av stor vikt. Man skulle kunna framföra denna paradox: inte därför att vi funnit lösningen, är det, som vi kunna framställa den i ord, utan därför att vi kunna uttrycka oss därom, är det, som vi funnit resultatet. Förståendet är en ohämmad disposition till handlande, en känsla av att kunna handla, möjlighet till ett aktivt ställningstagande. Så är omsättandet i handlande inte blott en följd av lösandet; det är en väsentlig del av detsamma. Den, som endast har lösningen »i huvudet» utan att kunna omsätta i handling, har ännu ej kommit fram till lösningen.

Vid analys av evidensen finner man, att det inte är fråga om något intellektuellt fenomen. »Riktighetsmedvetandet» består inte av förnimmelser eller föreställningar utan av vårt ställningstagande. Evident är en iakttagelse, då ställningstagandet är säkert, då intet hämmande eller störande förefinnes. Att denna evidenskänsla följes av ett formulerat omdöme, är inte att förvåna sig över, då ett sådant formulerande just är en del av ställningstagandet. Man kan också säga, att evidensen är en känsla av att ett omdöme måste avgivas, men inte ett omdöme vilket som helst utan ett bestämt, säger M.-F.

Vid jämförelse med det föregående framgår, att jag i mångt och mycket instämmer i vad M.-F. förfäktar. Problemlösningen (inte ens beträffande matematiska problem) kan inte uppfattas som ett rent intellektuellt fenomen, och framför allt går det vid tänkandet inte till så, som associationspsykologerna mena. Men det synes mig, som om M.-F. skulle gå för långt härvidlag, då han lägger så utomordentligt stor vikt vid det

affektiva och motoriska. Enligt min mening förekomma här stora individuella olikheter. Vid dessa undersökningar har exempelvis framgått, att tankeprocesserna beträffande fpna A. och D. varit av helt olika karaktär. Den av dem, som närmast arbetat i enlighet med M.-F:s framställning, är givetvis fpn D.

Sammanfattning.

Vi skola nu göra en kort sammanfattning av det föregående.

Av undersökningarna har tydligt framgått, att stora olikheter i fråga om problemlösandet förekommit. Faktorerna, som inverka härvidlag, kunna vara av dels mera yttre, dels mera inre, individuell art.

Olikheter beträffande problemens formulering kunna göra, att lösningarna av en och samma uppgift (rent matematiskt) få helt olika karaktär.

Vi ha också sett, huru problemens egen natur avsevärt inverkat härvidlag. Ett formelproblem exempelvis får ej samma behandling som en s. k. allmän uppgift.

Problembehandlingen kan erhålla sin särskilda karaktär på grund av att en viss räkneart användes. Ett räknearbete, varvid ekvationer användas, blir ofta annorlunda, än om problemen lösas på annat sätt.

Även inlärningssättet verkar härvidlag influerande. Såväl lärare som läroboksförfattare kunna ha vissa säregenheter, varav inverkan spåras.

Den räknandes tillstånd för tillfället kan vara anledning till olikheter i arbetssättet. Vid indisposition i en eller annan form nedsjunker oftast prestationen och får en mera primitiv form.

Den räknandes ståndpunkt (i fråga om kunskaper, begåvning och intresse) i förhållande till de delgivna problemen kan ge analyserings- och syntetiseringsarbetet en särskild karaktär. En räknare, som står på en relativt hög ståndpunkt, löser i

regel inte ett problem på samma sätt som en sämre räknare. Ju längre räknaren kommit i ämnet, ju mera fulländat blir hans arbetssätt. Vi ha sett, att fpna ha glidit över från associativ till logisk och så hän mot intuitiv analys och syntes.

Emellertid har också hos de i dessa undersökningar deltagande fpna förmärkts vissa olikheter i fråga om problembehandlingen, som icke kunnat bero på de här förut anförda förhållandena. En fpn har t. ex. kunnat envist fasthålla vid ett utförligt åskådliggörande, även där sådant, med hänsyn till de uppräknade orsakerna, ej bort förekomma. En annan har mera genomgående haft en viss motvilja mot ett dylikt förfaringssätt. På motsvarande sätt har det varit i fråga om grundlig eller icke grundlig analys, så ock beträffande de omedvetna momenten.

Olikheter beträffande åskådliggörande, analyseringssätt och omedvetna moment torde dock kunna hänföras till en och samma sak: olikheter i fråga om analysering och syntetisering. Härvidlag särskiljas, vad här kallats, associativ, logisk och intuitiv analys och syntes.

Den associativa analysen och syntesen kännetecknas ofta av ett angripande av problemen på måfå, den logiska av ett minutiöst sönderplockande i en viss ordning och den intuitiva av sammangripande och överskådlighet.

Processen vid problemlösandet kan uppdelas i tre huvudavdelningar, nämligen i för-, huvud- och efterperioderna. Gränserna mellan de olika perioderna äro dock flytande. Förperioden, som räcker ungefär, tills man tagit del av problemet och börjat analyseringen därav, karakteriseras av väntan på vad som skall komma, ett första inställande, en orientering. Huvudperioden, varunder det egentliga lösningsarbetet utföres, kännetecknas av analysering och syntetisering, som kan vara olika hos olika räknare. Efterperioden karakteriseras av evidens, »riktighetskänsla».

Känslo- och viljemoment förekomma vid problemlösandet i större utsträckning, än man skulle tro. Emellertid förefinnas även härvidlag stora individuella olikheter.

Pedagogiska konsekvenser.

Av de resultat, som erhållits vid dessa undersökningar, kunna vissa slutsatser dragas, vilka icke torde vara utan intresse för undervisaren i ämnet. Man må då lägga märke till att vad som här anföres, avser området inom matematiken från folkskolans till drygt realskolans kurs. Dock torde mycket äga sin tillämplighet även å områden, som ligga både under och över de resp. gränserna. Framhållas må också, att vad som här följer, gäller i fråga om matematikundervisningen, sådan den vanligen bedrives, ej då man ensidigt går i den ena eller andra riktningen, exempelvis lägger allt för stor vikt å ena sidan vid de formella, å andra sidan vid de praktiska, de materiella bildningsmomenten. Vi antaga också, att de yttre betingelserna äro goda för den räknande. Ett visst mått av intresse skall förefinnas; rädsla, trötthet och annan indisposition äro däremot uteslutna. Den räknande skall vara inställd på vad som skall komma, med ett ord vara försatt i ett gott uppfattningsläge.

Man får inte underskatta den arbetslättnad, som för den räknande ligger däri, att materialet (problem, satser, regler o. s. v.) delgives i den mest lätthanterliga form. Problemen och annat hithörande böra ha så kort formulering som möjligt. Men man får inte sammanträngа för mycket, ty då blir det hela svårfattligt. Formuleringen skall vara kort för tanken, vilket inte alltid är det samma, som att den är kort för ögat. Den bör vara sådan, att man (hänsyn måste naturligtvis tagas till den räknandes ståndpunkt) kvickt fattar och så mycket som

möjligt kan överskåda och fasthålla innehållet. Formuleringen bör ur logisk synpunkt vara riktig och så knapp som möjligt men ändå ej för hoppgyttrad.

Tyvärr anses på en del håll sådan lättfattlig formulering som mindervärdig. Så anses värdefulla arbeten för »ovetenskapliga», just därför att de äro lättlästa. Sådana synpunkter böra naturligtvis inte få anläggas i fråga om texten till matematiska problem på hithörande område.

Läroböckerna (och även lärarna) böra givetvis använda ett språk, som härvidlag håller måttet. Skulle vissa egenheter förefinnas, måste sådant klargöras före den matematiska behandlingen och fel härvidlag hänföras till företeelser av språklig art.

Bör man vid undervisningen på hithörande område använda sig av ekvationer eller ej? Den formella bildningen torde onekligen bli bättre tillgodosedd, om lärjungarna tvingas att lösa problemen utan ekvationer, så långt nu detta går. Men räkneundervisningen har också ett praktiskt syfte, att föra fram till ett snabbt och säkert lösande av räkneuppgifterna.

Vid användandet av ekvationer blir man ofta vid problemlösning tvingad att analysera tämligen grundligt samt tvingad att analysera och syntetisera på ett visst sätt. Vid s. k. formelproblem ligger det nära till hands att stycka sönder problemet och mata in i formeln, vad som behövs för att ekvationen skall bli färdig och kunna lösas.

Men även i fråga om andra uppgifter, som inte precis kunna kallas för formelproblem, tvingas man vid användandet av ekvationer mången gång till grundlig och på visst sätt skeende analys. Det finns också uppgifter, som, ehuru de icke äro formelproblem, ändå fordra rätt så karakteristiska ekvationer. Så t. ex. i fråga om förut omnämnda »blandningstal», »arbetstal», »rörtal» o. s. v. Räknarna äro oftast benägna att »typisera», vilket ju också bör underlätta arbetet.

Användandet av ekvationer för oftast med sig en stegvis gående analysering och syntetisering. Man strävar från början att, om inte annat, definiera den eller de obekanta samt att få en likhet, en ekvation. Redan detta tvingar i viss mån till analys och syntes. Lyckas man så få fatt på någon sådan likhet, eller tror man sig ha funnit en sådan, gäller det att

sätta in ur problemet utplockade delar, tills bägge sidorna om likhetstecknet fått sitt.

Det är relativt lätt att på detta sätt verkställa en analys och syntes. Det torde vara på grund härav, som man vanligen lyckas bättre vid lösning med än lösning utan ekvationer, även i fråga om problem, som gott kunna lösas på sist angivna sätt. Naturligtvis förutsättes, att den räknande behärskar nödiga delar av ekvationsläran.

Många anse dock, att man i det längsta bör uppskjuta med användandet av ekvationer. Som skäl härför anföres, som förut påpekats, att matematiken vid användandet av sådana ej får samma formella bildningsvärde. Räkningen kommer att bli mera mekanisk, hantverksartad. Tanken får inte samma övning, det blir mera fråga om färdighet än kunskap, menar man.

Häremot må framhållas, att räkneundervisningen också har ett praktiskt mål. Visar det sig nu, att användandet av ekvationer ger bättre resultat i detta hänseende, har ju tillvägagångssättet därmed ett visst övertag. Vidare kommer räkningen med ekvationer även att tillfredsställa kravet beträffande den formella bildningen, om svårare uppgifter föreläggas. Som man med användande av ekvationer under för övrigt lika omständigheter vanligen kommer ett stycke längre, än om räkningen sker på annat sätt, blir detta också verkligen tillgodosett. Därtill kommer, att man förr eller senare, om man vill gå vidare i ämnet, måste tillgripa ekvationer för att kunna reda sig.

Dock får man naturligtvis inte uteslutande hänge sig åt denna räkneart. Att ibland vid lämpliga problem jämföra de båda lösningssätten med varandra, kan inte vara annat än nyttigt. Vidare måste man se till, att inga luckor i det föregående finnas. Om sådana brister avhjälpas, försvinna oftast olust för ämnet och förmodad obegåvning.

Emellertid torde det vara lämpligast att vid undervisningen utöver den egentliga folkskolan gå in på ekvationsläran.

Vid dessa undersökningar har framgått, att de flesta fpna visat tendens att typisera, d. v. s. att samla problem med ge-

mensamma kännetecken till en viss enhet eller att låta det enskilda problemet eller uttrycket i sig innesluta en mängd andra. De karakteristiska lösningssätten av dessa typproblem ha så fått vara normer för andra likartades lösning. Vid undervisningen bör man ta hänsyn härtill. D. v. s. man bör i klassen gå igenom vissa typiska uppgifter synnerligen grundligt och särskilt framhålla det för de till kategorien hörande gemensamma.

Även formler och regler ha liknande karaktär. Har man under lösandet av uppgifter kommit till ett allmängiltigt resultat i form av en formel eller regel, kan det inte vara annat än berättigat, att undersökningarnas eller arbetets resultat samlas i ett visst lättihågkomligt uttryck. Även i fråga om lätt framdeducerbara formler och regler kan det vara fördelaktigt att slippa gå igenom allting från början. Så är t. ex. formeln för likformig rörelse ($v = h \,.\, t$) ytterst lätt framtagbar, men det lider intet tvivel om att det ändå verkar underlättande att få sätta in i formeln direkt utan att först ta fram densamma eller i varje fall arbeta sig fram till samma resultat, för vilket formeln är ett uttryck. Det vore ju tidsödande och för övrigt rätt intresselöst att gång på gång göra om samma arbete. Att man sedan om så påfordras, skall kunna deducera fram formeln eller regeln, är ju tydligt.

Men man får inte komma med för mycket av typer, formler och regler, ty då kan det hela verka försvårande i stället för underlättande. Man må se till, att typexemplen äro verkligt typiska och formlerna och reglerna verkligt underlättande.

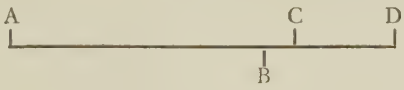
Beträffande hithörande förhållanden hänvisas till ett par av mina uppsatser i Svenskt arkiv för pedagogik 1917 och 1918 (»Ett försök rörande nyttan av regler vid räkneundervisning» och »Genmäle»).

Det framgår av det föregående, att svag analys och otillräckligt åskådliggörande oftast fört med sig eller hört samman med mindre gott räkneresultat. Man skulle kunna säga, att dylik analys och ett sådant åskådliggörande äro brister eller fel, för övrigt typiska fel. Ett typiskt fel är också att hugga ned på delar av problemet mera på måfå.

Om det också utan vidare är klart, att svag analysering, otillräckligt åskådliggörande och angripande på måfå medföra dåligt räkneresultat, torde det måhända i detta sammanhang ändå vara behövligt att, med hänsyn till begångna fel, en smula närmare analysera de 28 fpnas utsagor. Särskilt utsagorna angående de första exemplen, där felprocenten var jämförelsevis hög, borde innehålla åtskilligt av intresse.

Vi ta ex. 1 i betraktande (se sid. 23.) Först bör kanske för jämförelses skull en »normallösning», d. v. s. ett sätt som bort användas — naturligtvis med tagen hänsyn till den ståndpunkt, varpå fpna vid tiden för detta problems räknande stodo — vid uppgiftens lösande, framläggas. Av utsagorna att döma borde det gå till ungefär så här:

— Först läser jag exemplet och ser efter, varefter det frågas. Jo, priset på 1 kg. mjöl. Så läser jag om igen från början för att få någon angreppspunkt. Därunder får jag klart för mig, att bonden köpte 6 kg. mindre, än som var bestämt. Vidare lägger jag märke till att det fattades 1,34 för honom, om han köpte 67 kg. Det gick då åt *mer*, än han hade med sig. Han fick 22 öre över, om han köpte 61 kg. Det gick då åt *mindre*, än han hade med sig. Då ritar jag upp så här:



Stycket A—D är, vad som erfordrades för att köpa 67 kg.; A—B vad som behövdes för 61 kg., och A—C den summa, han hade med sig. Då motsvarar B—C 22 öre och C—D 1,34 kr. Stycket B—D är priset på 6 kg., d. v. s. 6 kg. kosta $1{,}34 + 0{,}22 = 1{,}56$ kr. Då kostar 1 kg. $^1/_6$ därav, d. v. s. 0,26 kr. Så prövar jag riktigheten genom att ånyo gå igenom uppgiften på liknande sätt samt genom att ta $61 \cdot 0{,}26$. Detta blir 15,86 och är priset på 61 kg. Men då hade han 22 öre över. Hela summan, han hade, var således $15{,}86 + 0{,}22 = 16{,}08$. Sen tar jag $67 \cdot 0{,}26$ och får det till 17,42. Om nu skillnaden blir 1,34, bör det vara rätt. $17{,}42 - 16{,}08 = 1{,}34$. —

Så ungefär ter sig en normalutsaga angående denna upp-

gift. Det tämligen vidlyftiga åskådliggörandet och analyserandet ter sig måhända för en räknare, som trängt djupare i ämnet, som överloppsgärningar. Men man måste ta hänsyn till att fpna vid tiden för lösandet av uppgiften stodo på en låg ståndpunkt beträffande kunskaper och färdigheter i matematik; inte mindre än 15 st., 57 %, misslyckades.

Vilka avvikelser från normalförfarandet, vilka fel gjordes då av felräknarna? Av de 15 fpna ha 3, som det synes, huggit till på måfå. Alla de andra ha utan svårighet om också på olika sätt nått fram till en viss punkt, ett visst moment i lösandet: skola de 22 örena dras ifrån eller läggas till 1,34 kr.? Redan innan fpna kommit så långt, har fastslagits, att det var fråga om 6 kg. Men så ha inte mindre än 12 fpnr dragit 22 öre från 1,34 kr. i stället för att lägga till.

Nu är ju utan vidare klart, att det omskrivna momentet är, relativt taget, det enda egentliga svåra i uppgiften. »Han fick för mycket, och han fick för litet, hur skall jag förstå det?» utropar en fpn, och hos många av de andra kan man spåra samma tankegång, även om den inte så tydligt kommit till uttryck. Vad är det då, som gör denna punkt så svåröverkomlig? Själva den matematiska operationen är ju av allra enklaste beskaffenhet; i denna kan ej svårigheten ligga. Nej, det svåra är att forma om texten till ett motsvarande matematiskt uttryck. Ju krångligare den språkliga formuleringen är, ju svårare är det att göra en sådan omformning. Detta har också tydligt framgått av de resultat, som erhållits vid undersökningen angående detta förhållande. Ordet »över» i uppgiften synes ha verkat vilseledande. »Då det blev över, bör man väl dra ifrån», ha en del fpnr resonerat. Fpna ha inte riktigt kunnat *fasthålla* vid att det vid köp av *61* kg. blev 22 öre över. Men tanken på de 6 kg., som det gällde att få ett pris på, har på visst sätt varit dominerande. Att 1,34 skulle vara med som positiv term, har ingen av dessa 12 fpnr dragit i tvivelsmål. Denna summa skulle självfallet vara med. Vidare var klart, att det var fråga om 6 kg. De 22 örena måste nog också vara med, men på vilket sätt? Jo, det blev »över»; detta uttryck fordrar ett minus; alltså $1{,}34 - 0{,}22$. Detta är priset på

6 kg. Så delas med 6, och saken är klar! Så ungefär synas de flesta felräknarna ha resonerat.

Genomgående ha således dessa fpnr inte gjort fullt klart för sig eller kunnat fasthålla vid verkliga innebörden av den nämnda svåra punkten i problemet. De ha nog tämligen lätt kommit fram till själva slutsatsen (1,34 — 0,22), men denna har blivit oriktig, emedan det, varpå slutsatsen byggts, ej varit tillräckligt bearbetat utan gripet mera på måfå.

Av normallösningen se vi, hur många av rätträknarna gått tillväga. Uttrycket »det fattades honom 1,34 kr.» klargöres och innebörden inpräntas av dessa genom omskrivningen eller konstaterandet: »Det gick då åt mer, än han hade med sig». På samma sätt klargöres och fastslås förhållandet beträffande de 22 örena: »Det gick då åt mindre, än han hade med sig.» Redan genom denna noggranna och upprepade analysering av det svåra partiet ha rätträknarna nog i allmänhet fått klart för sig, att det matematiska uttrycket måste bli 1,34 + 0,22. Emellertid ha flera det oaktat genom uppritandet av linjer ytterligare sökt klarlägga det svåra momentet. Vi återkomma således till att bristande analysering och åskådliggörande samt ett angripande mera på måfå nästan med nödvändighet föra med sig dåligt räkneresultat. Ty genom grundligt analyserande och åskådliggörande tvingas eller förhjälpes den räknande att sätta sig in i och fatta samt — vilket visat sig vara av stor vikt — fasthålla vid verkliga innebörden av viktigare partier av problemet. Detta fasthållande kan också, som framgått av dessa undersökningar, i betydlig grad underlättas genom att den räknande nedskriver tankegången inte bara i siffror utan även i ord (avgiver utsagor).

Vi övergå till ex. 4 (se sid. 24!). Enligt utsagorna skulle en normallösning se ut ungefär så här:

— Läste igenom exemplet och lade märke till att det frågades efter spannmålsförrådets storlek, samt att man måste lägga på 2 kl. mer, om man tog det i 12 lass, än om man tog det i 13. Ritar upp 2 lika långa linjer, som föreställa förrådet, och delar det ena i 12 och det andra i 13 delar.

Kallar antalet hl. pr lass, då det togs i 13 lass för x. Då blir det $x+2$ hl., om förrådet togs i 12. I bägge fallen togs hela förrådet; alltså erhålles ekvationen $13\,x = 12\,(x+2)$. Härav $x = 24$. Detta är antalet hl. pr lass, om förrådet tas i 13 lass. Alltså är förrådet $13 \cdot 24 = 312$ hl. Prövar riktigheten genom att ta $12 \cdot 26$ ($26 =$ antalet hl. pr lass, om förrådet tas i 12 lass). Detta blir också 312. Alltså bör det vara rätt räknat. —

Felräknarna ifråga om detta problem ha varit 5. De flesta (17) fpna ha använt sig av ekvationer. Alla dessa ha löst uppgiften rätt. Av dem, som icke använt sig av ekvationer, ha 5 räknat rätt och, som sagt, 5 orätt. Varpå ha då felräknarna stupat? Jo, samtliga dessa fpnr ha fått ut att, då det måste läggas 2 hl. mer på vart lass, om förrådet togs i 12, ett lass borde bestå av 24 hl. Men hur många lass, 12 eller 13? Detta synes ha varit den svåraste punkten i detta problem. De 2 hl. synas ha uppfattats som hörande ihop med de 12 lassen. Förmodligen har detta skett till stor del därför, att texten på visst sätt inbjuder därtill. (»Tages det i 12 lass, måste man lägga 2 hl. mer på varje lass».) Men det är för övrigt inte alldeles så lätt att avgöra, om man skall multiplicera 24 hl. med 12 eller med 13. De, som använt sig av ekvationer, ha härvidlag haft lättare att komma rätt än de andra. Genom åskådliggörandet med linjer har det inte blivit svårt att få upp ekvationen. Och när så $x = 24$ erhållits, har det varit nästan självklart, att 24 skulle multipliceras med 13, då ju $13\,x$ (enl. ekvationen) var lika med hela förrådet. Men de övriga fpna ha ej haft ekvationen som ledning, och uppgiften är ej så lätt att ytterligare åskådliggöra. Några av fpna ha »tänkt sig», att 2 hl. avlyfts från vart och ett av de 12 lassen (detta är ju också ett åskådliggörande) och på så sätt fått det 13:e. Därigenom ha dessa kommit rätt. Några ha analyserat upp det svåra momentet grundligt, ungefär så här: — Det är således *mer* på varje lass, när det tages i 12 lass. Det är *mindre*, då det

tages i 13. Det är *2* hl. mer, om det tas i 12 lass. Om dessa 2 hl. tas bort, så bilda de ett lass till. Detta lass blir det 13:e. Men de 2 hl. tas av de 12 lassen. Det blir alltså $12 \cdot 2 = 24$ hl., som togos bort från de 12 lassen. Men detta bildade det *13:e* lasset. Alltså blir det nu *13* lass. Det är således 13 lass och 24 hl. på vart lass. Förrådet var alltså $13 \cdot 24 = 312$ hl. —

Som vi se, har en grundlig, stegvis gående analys ägt rum. Delvis har samma sak nästan ängsligt upprepats. Så är förhållandet beträffande fastslåendet av att det måste bli 13 lass. Det är också genom oförmågan att fasthålla härvid som felräknarna kommit vilse. (En har dock tydligen huggit till på måfå utan att företa någon egentlig analys av det svåra partiet.)

Hur stort bryderi har för övrigt inte lärjungarnas oförmåga att fasthålla vid premisserna, vid en slutsats eller ett vunnet delresultat vållat både lärare och elever vid matematikundervisningen, särskilt vid sysslandet med längre geometribevis! Man behöver bara erinra om satsen, »att summan av kvadraterna på kateterna är lika med kvadraten på hypotenusan». T. o. m. en slutsats dras måhända rätt så ledigt, men så kommer man att under fortsättningen syssla med annat, och så kan det föregående inte fasthållas. När det så behövs, är det dunkelt eller alldeles borta, och det, som bygges på det föregående, blir oriktigt.

Även i fråga om ex. 4 se vi, att svårigheterna övervunnits genom grundligt analyserande och åskådliggörande. Och tvärt om har ett motsatt förfarande oftast fört med sig ett dåligt räkneresultat.

Man skulle också kunna säga, att de begångna felen uppkommit därigenom, att fpna i allmänhet stått på för låg ståndpunkt i fråga om analyserings- och syntetiseringsförmåga. De ha för mycket stått på den associativa analysens och syntesens plan och således inte varit mäktiga den logiska.

I detta sammanhang ha fel i problembehandlingen tagits i den bemärkelsen, att räknearbetet fört till ett oriktigt resultat, att ett orätt svar erhållits. Det är ju givet, att räknearbetet kunnat vara mer eller mindre underhaltigt, även om räknaren kommit till ett riktigt slutsvar. Dels har den för lösningen använda tiden kunnat vara allt för lång, dels ha lösningarna kun-

nat vara tämligen klumpiga, och detta även om arbetet haft tydlig karaktär av logisk analys och syntes. Den intuitiva analysen och syntesen har då förekommit i allt för liten utsträckning.

Många fel ha uppkommit (särskilt i början av undersökningarna) därigenom, att själva sifferbehandlingen varit otillfredsställande. Dessa falla emellertid utom ramen för denna framställning, som sysslar med det för problembehandlingen säregna. I de undersökningar, jag företagit angående hithörande förhållanden, har jag för övrigt delvis kommit till samma resultat som E. HYLLA, vilkens undersökningar omnämnas å sid. 14 o. ff.

Emellertid har under undersökningarnas gång en glidning ägt rum mot ett mera ändamålsenligt tillvägagångssätt. Räkneresultatet har också blivit bättre, oaktat problemen blivit svårare och således enbart ur denna synpunkt större krav måst ställas på analysen och syntesen. Så ha flera icke eller svagt åskådliggörande och svagt analyserande fpnr glidit över till ett mera åskådligt och analyserande tillvägagångssätt mot slutet av undersökningarna.

Ett par utsagor må anföras som prov på sådan glidning. Först en utsaga från början av undersökningarna:

28_1: »— — — Läste genom exemplet och tyckte, att detta var en svår uppgift för bonden att lösa. Eftersom priset på mjölet hade stigit, kunde han inte köpa så mycket, som hans granne bestämt. Hur skall jag komma till klarhet med det här talet? Jag tar och delar 1,34 med 67. Om pengarna, som bonden fick, blivit uppgivna, så hade det ej varit någon konst. Jag satt och tänkte över en stund, då jag kom att tänka på att jag skulle dra 61 från 67. Det blir 6 kg. mindre han köpte. Så dum jag var, som inte såg detta förut. Men inte vet jag mer för det. Då jag funderat en lång stund, varför bonden skulle få ett så krångligt ärende, blev det klart för mig med ens, att jag skulle dra 22 öre från 1,34 kr. och dela med 6. 1,34—0,22 = 1,12 — — —».

Så en av de sista utsagorna av samma fpn.

28_9: »— — — Sedan jag sett igenom uppgiften, kom jag att tänka på att jag borde ta reda på hur mycket allt vattnet blev. Bäst att rita upp detta. (En ritning föreställande ett kärl,

delat i 3 delar, hade utförts). Nu är det 500 l. i botten. Hur mycket innehöll den andra delen? Man började ösa 3 min. senare. Sprutan var i gång i 20 min. Alltså blir det 17 min. Nu rymde det första kärlet 8 l. och tömdes 9 ggr i min. Det blir 8 . 9 . 17 = 1224 l. Så mycket blir det i andra delen av behållaren. Det andra kärlet rymde 8,5 l. och tömdes 8 ggr i min. Det blir 8 . 8,5 . 17 = 1156. Det blir så mycket i den tredje delen. Nu tar jag och drar ifrån 500 från 1 224 + 1 156 och delar med 20. 2 380 — 500 = 1 880. Medan jag räknade på detta, fick jag hastigt klart för mig, att jag skulle lägga till 500 i stället för att dra ifrån — — —».

Under det att den första av dessa utsagor är synnerligen fattig på åskådliggörande moment och vidlyftigare analys, innehåller den andra jämförelsevis ej så litet därav, ehuru ex. 9 ej torde mer än ex. 1 inbjuda till ett sådant tillvägagångssätt.

Andra fpnr däremot ha under undersökningarnas gång i viss mån övergått till ett svagare åskådliggörande och analyserande. Detta torde ha sin grund i att fpna vid större kunskap och färdighet på området ej behövt åskådliggöra och analysera i så stor utsträckning; problemet har utan större svårighet kunnat lösas ändä. Det som utan vidare klart uppfattats, behöver ju ej någon ytterligare bearbetning. Särskilt har sådant, som ej haft någon vidare betydelse för räkningen, vid större kunnighet lämnats åsido. T. o. m. av utsagorna av fpn 28, vilka utsagor ju avse att belysa glidningen över mot åskådlighet och starkare analys, framgår detta. I utsagan angående ex. 1 heter det, »att detta var en svår uppgift för bonden att lösa». Prisstegringen och uppgörelsen med grannen bli också framdragna. Detta vittnar ju om att fpn satt sig in i situationen och händelseförloppet (ett visst slag av åskådlighet skulle man kunna säga) och även tar fram dithörande delar (analys), men detta torde nog ha ytterst liten betydelse för att uträkningen skall lyckas. Ofta har nog ett sådant tillvägagångssätt t. o. m. verkat hindrande.

Undersökningarna ha således givit vid handen, att grundligt åskådliggörande och analyserande oftast hört samman med goda räknare. Härav skulle man kunna dra den slutsatsen, att ett sådant förfaringssätt i allmänhet skulle vara förmånligt, och

att därigenom ett gott räkneresultat skulle vinnas. Kunde man så på något sätt få de räknande, särskilt de mindre goda, att använda sig av grundlighet härvidlag — och undersökningarna ha också visat, att en sådan glidning är möjlig — borde resultatet förbättras, synes det.

För att få ett åskådliggörande i ord till stånd, kan man ge lärjungarna i uppgift att formulera om problemen eller vissa partier av dem just i syfte att göra dem mera åskådliga. Som läroböckerna tyvärr innehålla en mängd problem med otymplig formulering, fattas inte material härvidlag. Uppgiften för de räknande kan ock ställas så, att det helt enkelt kräves att ge ett sådant problem en lätthanterlig formulering.

Närbesläktat med detta är att insätta enkla siffror i stället för mera krångliga uttryck. Man kan också åskådliggöra genom att ställa upp ett fingerat fall, där lösningen redan är klar eller överskådlig. I det föregående återfinnas exempel på dylika förfaringssätt.

Då det är fråga om att åskådliggöra ett problem, tänker man kanske närmast på att genom ritningar och dylikt för synsinnet framställa förhållanden och uppgifter, som problemet innehåller. Säkert är också, att ett sådant tillvägagångssätt ofta verkar underlättande. För att få till stånd ett sådant, kan man ge lärjungarna i uppgift att på så sätt åskådliggöra lämpliga problem.

Viktigt är naturligtvis, att de räknande i fråga om uppgifter, där så går för sig, ibland få se själva saken, som skall behandlas. Geometriska uppgifter exempelvis bli åskådliggjorda därigenom, att den räknande får handskas med (se och mäta upp) vad som är före.

Även det vid lösningen vunna resultatet skall på visst sätt åskådliggöras, i det att det ställes i en jämförande belysning. De räknande böra alltid fråga sig, om det erhållna resultatet är rimligt eller ej, pröva det på ett eller annat sätt.

Som det visat sig, att ett grundligt analyserande (med analysen följer också en syntes) lett till gott räkneresultat, bör man söka få till stånd ett sådant tillvägagångssätt. Analysen får naturligtvis inte stanna vid blotta omdömen, varvid problemets egna ord användas.

I fråga om mera sammansatta problem kunna lärjungarna få i uppgift att särlägga dem i delproblem. Detta jämte fasthållandet och kombinationen av delproblemen är det, som i början förefaller så svårt. Oförmåga härvidlag är just karakteristiskt för en dålig räknare.

Vidare kan man helt enkelt låta lärjungarna redogöra för hur ett problem skall tas. Det är ej nödvändigt att vid undervisningen alltid och fullständigt uträkna problemen. En riktig redogörelse för hur man skall gå tillväga är lika effektiv för så vitt — vilket ju bör vara fallet — vederbörande äga förmåga att sifferbehandla de uppgifter, det är fråga om. Om en sådan redogörelse får gå för sig i klassen, få också lärjungarna (vilket är särskilt viktigt för de svagare) en mängd exempel på hur uppgifterna böra behandlas. Härigenom vinnes också en avsevärd tid, eller man hinner på så sätt att gå igenom en massa uppgifter.

Ett annat sätt att bringa de räknande till en djupare pejling av problemen är att låta dem avgiva utsagor. D. v. s. man uppmanar lärjungarna att i fråga om vissa lämpliga uppgifter skriftligt redogöra för hur de lösa dem. Som förut påpekats, gäller det att komma över från den associativa till den logiska analysen och syntesen. Under beskrivandet av tankegången tränger man djupare in i problemet. Det är ett dylikt formulerande, som ofta verkar så klargörande; formuleringsförsöket tvingar den räknande att ytterligare sätta sig in i de förhållanden, som äro före. Resultatet av ett sådant förfaringssätt har enligt min erfarenhet visat sig bli synnerligen gott. Dessutom lär man genom utsagorna eller redogörelserna bättre känna de särskilda lärjungarna och hittar lättare vars och ens speciella svaga punkter och individuella olikheter för övrigt. Man får naturligtvis inte av åtminstone yngre lärjungar fordra för utförliga redogörelser.

Egentligen bör man ju sträva efter att få den intuitiva analysen och syntesen förhärskande. Men i fråga om det område, som här avhandlas, kommer man oftast inte så långt. Man får vara nöjd, om lärjungarna komma ifrån den associativa fram till logiska analysen och syntesen. För övrigt är det

just under strävandet att komma därhän, som förutsättningarna för ett intuitivt arbetssätt bildas.

Det mål, man bör sträva efter, är ju att problemen lösas rätt, snabbt och elegant. Ofta får man på här behandlat område nöja sig med att det första av dessa krav tillfredsställes. Men detta hindrar inte, att man bör vinnlägga sig om att lärjungarna även lösa problemen snabbt och elegant. Detta sker dock, först när den intuitiva analysen och syntesen blir förhärskande. (Som förut framhållits, förekomma naturligtvis alltid, fastän mer och mindre, alla tre formerna: associativ, logisk och intuitv analys och syntes.)

Genom att gå igenom massor av uppgifter kan man emellertid komma ytterligare ett stycke på väg mot målet. För att få tid till detta måste man delvis inskränka sig till att, på sätt som förut angivits, låta lärjungarna endast muntligt redogöra för, ej fullständigt uträkna (sifferbehandla) problemen. För övrigt kan det ju ej behövas att alltjämt genomgå en mängd förut kända detaljer. Det är först sedan lärjungarna behandlat en stor mängd problem, som överskådlighet vinnes. Men man må väl akta sig för att denna överskådlighet får associativ karaktär. Den ytliga iakttagaren kan härvidlag lätt göra sig skyldig till förväxling.

Vad som här sagts, gäller endast i allmänhet. Men enligt dessa undersökningar förefinnas individuella olikheter. Detta måste undervisaren alltid ta hänsyn till. Det viktigaste av allt härvidlag är, att undervisningen är verkligt god. Den borne läraren har förmåga att ana sig till vad som behövs här och vad som fattas där. Han upptäcker och botar luckorna i lärjungarnas vetande. Han känner med sig, vad lärjungarna veta och icke veta. För att erhålla ett riktigt gott resultat vid räkneundervisningen fordras mer än pedagogiska metoder, de må sedan vara hur goda som helst. Vad som behövs, är pedagogisk konst.

RÄTTELSER.

Sid.	28,	rad	7	står	inläsningssätt,	läs	inlärningssätt.
»	47,	»	29	»	översättningarna,	»	förutsättningarna.
»	52,	»	20	»	5,3,	»	5,5.
»	66,	»	35	»	m^2,	»	dm^2.
»	77,	»	30	»	kusen,	»	kursen.
»	84,	»	25	»	cm,	»	cm^2.
»	103,	»	30	»	sakna-,	»	saknas.